Universität Konstanz Cordian Riener
Fachbereich Mathematik und Statistik Sebastian Gruler
Sommersemester 2017 Julian Vill

Darstellungstheorie endlicher Gruppen – Übungsblatt 2

Im folgenden sei R ein kommutativer Ring und M und N R-Moduln.

Definition (Tensorprodukt):
Ein *Tensorprodukt der R-Moduln M* und N ist ein R-Modul T zusammen mit einer R-bilinearen Abbildung $\tau : M \times N \to T$ so, dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Zu jedem R-Modul L und jeder R-bilinearen Abbildung $\alpha : M \times N \to L$ existiert genau ein R-lineare Abbildung $\beta : T \to L$ mit $\alpha = \beta \circ \tau$, wie in folgendem (kommutativen) Diagramm dargestellt.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\forall\alpha"'] & T \arrow[d, dotted, "\exists!\beta"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Aufgabe 1.
Zeige, dass folgende Konstruktion ein Tensorprodukt von M und N liefert:
Sei $F = R^{(M\times N)}$ der von $M \times N$ frei erzeugte R-Modul. Schreibe die Elemente von F als endliche Linearkombinationen der Gestalt $\sum_i a_i[x_i, y_i]$ $(a_i \in R, x_i \in M, y_i \in N)$, wobei $[x, y] := ((a, b) \mapsto \delta_{(x,y)}(a, b))$ und δ das Kronecker-Delta. Sei U der Untermodul, erzeugt von den Elementen der Form

$$\begin{gathered} [a_1 + a_2, b] - [a_1, b] - [a_2, b] \\ [a, b_1 + b_2] - [a, b_1] - [a, b_2] \\ [ra, b] - r[a, b] \\ [a, rb] - r[a, b] \end{gathered}$$

mit $r \in R, a, a_1, a_2 \in M, b, b_1, b_2 \in N$.
Setze nun $T := F/U$ und $\tau : (x, y) \mapsto \overline{[x, y]} \in T$.

Zeige außerdem, dass ein Tensorprodukt in folgendem Sinne bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist: Sind (T_1, τ_1) und (T_2, τ_2) zwei Tensorprodukte von M und N so gibt es genau einen Isomorphismus $\varphi : T_1 \to T_2$, der mit den τ_i verträglich ist, d.h. $\tau_2 = \varphi \circ \tau_1$.

Man bezeichnet *das* Tensorprodukt (T, τ) von M und N mit $M \otimes_R N$ (oder nur $M \otimes N$) und schreibt $x \otimes y$ für $\tau(x, y)$.

Aufgabe 2.
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik $p > 0$ so, dass $p|n$. Zeige, dass
$$\mathbb{K}[G]^G := \mathbb{K} \sum_{g \in G} g \subset \mathbb{K}[G]$$
ein $G-$Untermodul von $\mathbb{K}[G]$ ist, der kein direkter Summand von $\mathbb{K}[G]$ sein kann.

Hinweis: Angenommen $\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}[G]^G \oplus U$ mit einem $G-$Untermodul U, dann definiert $\pi ; \mathbb{K}[G] \to \mathbb{K}[G]^G$, $v \oplus u \mapsto v$ eine G-äquivariante Projektion. (d.h. $\forall g \in G$ und $v \in \mathbb{K}[G]$ gilt $\pi(gv) = g\pi(v)$. Führe dies zum Widerspruch.

Aufgabe 3.
Sei A eine Algebra. Dann ist das Zentrum von A definiert als $Z_A : \{a \in A : ab = ba \, \text{für alle} \; b \in A\}$. Sei nun $M : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix-Darstellung einer endlichen Gruppe. Angenommen, diese Darstellung ist irreduzibel, wie sieht das Zentrum von $\mathrm{Com}\, M$ aus? Verallgemeinere diesen Fall auf den allgemeinen Fall einer Darstellung, die zerlegt werden kann.

Aufgabe 4.
Seien $\varphi : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \, g \mapsto \varphi_g$ und $\rho : G \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \, g \mapsto \rho_g$ Darstellungen einer endlichen Gruppe G. Sei $V = \mathbb{C}^{m \times n}$ mit Standartbasis $\{E_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, und sei $\kappa : G \to \mathrm{GL}(V)$ gegeben durch
$$\kappa_g(A) = \rho_g A \varphi_g^t.$$
Zeige:

a) κ ist eine Darstellung von G,

b) $\kappa_g E_{k,\ell} = \sum_{i,j} \rho_{ik}(g) \varphi_{j\ell}(g) E_{ij}$ und

c) $\chi_\kappa(g) = \chi_\rho(g) \chi_\varphi(g)$.

Abgabe bis Mittwoch, den 31. Mai 2017, vor der Vorlesung um 10:00 Uhr in Briefkasten Nr. 18.