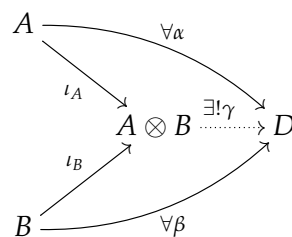


## Darstellungstheorie endlicher Gruppen – Übungsblatt 3

### Aufgabe 1.

Sei  $R$  ein kommutativer Ring und seien  $A$  und  $B$  kommutative  $R$ -Algebren, also insbesondere  $R$ -Moduln. Sei  $A \otimes B$  das Tensorprodukt von  $A$  und  $B$  wie in Aufgabe 1 von Blatt 2. Zeige folgendes:

- a) Auf  $A \otimes B$  gibt es genau eine Multiplikation  $\cdot$  derart, dass für alle  $a, c \in A$  und  $b, d \in B$   $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd$  gilt. (Hinweis: Verwende die universelle Eigenschaft.)  
 $A \otimes B$  wird somit auch zu einer  $R$ -Algebra.
- b)  $\iota_A : A \rightarrow A \otimes B, a \mapsto a \otimes 1$  und  $\iota_B : B \rightarrow A \otimes B, b \mapsto 1 \otimes b$  sind  $R$ -Algebrenhomomorphismen und  $(A \otimes B, \iota_A, \iota_B)$  erfüllt die durch folgendes Diagramm dargestellte universelle Eigenschaft:



In Worten: Für alle  $R$ -Algebren  $D$  und Algebrenhomomorphismen  $\alpha$  und  $\beta$  wie im Diagramm, existiert genau ein Algebrenhomomorphismus  $\gamma$ , für welchen  $\alpha = \gamma \circ \iota_A$  und  $\beta = \gamma \circ \iota_B$  gilt.

Eine  $R$ -Algebra mit diesen Eigenschaften wird *Tensorprodukt der  $R$ -Algebren  $A$  und  $B$*  genannt und wieder mit  $A \otimes_R B$  bzw.  $A \otimes B$  bezeichnet.

- c) Zeige, dass auch dieses im obigen Sinne bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig ist.

### Aufgabe 2:

Sei  $K$  ein Körper und  $V, W$  endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume (also insbesondere auch wieder  $K$ -Moduln). Weiter sei  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine Basis von  $V$  und  $(w_j)_{1 \leq j \leq m}$  eine Basis von  $W$ . Zeige, dass  $(v_i \otimes w_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  eine Basis des Vektorraums  $V \otimes W$  bildet.

**Aufgabe 3:**

Seien  $G_1$  und  $G_2$  endliche Gruppen und  $V_i$  ein  $G_i$ -Modul ( $i=1,2$ ).

a) Zeige, dass

$$V_1 \otimes V_2$$

vermöge der Wirkung

$$(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = (g_1 v_1) \otimes (g_2 v_2)$$

zu einem  $G_1 \times G_2$ -Modul wird.

b) Zeige, dass wenn  $V_1$  und  $V_2$  jeweils irreduzible Darstellungen sind, so ist auch  $V_1 \otimes V_2$  irreduzibel.

c) Zeige, dass alle irreduziblen Darstellungen von  $G_1 \times G_2$  von dieser Gestalt sind.

*(Hinweis für b,c: Betrachte die entsprechenden Charaktere.)*

**Abgabe** bis Mittwoch, den 14. Juni 2017, vor der Vorlesung um 10:00 Uhr in Briefkasten Nr. 18.