

Kombinatorische Optimierung – Übungsblatt 2

Aufgabe 1.

Hinweis: Folgende Tabelle fasst nochmal den Zusammenhang zwischen primalem und dualem Programm zusammen:

	Primales LP	Duales LP
Variablen	x_1, \dots, x_n	y_1, \dots, y_m
Matrix	A	A^T
Rechte Seite	b	c
Zielfunktion	$\max c^T x$	$\min b^T y$
Bedingungen	i -te Bedingung hat \leq	$y_i \geq 0$
	\geq	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j -te Bedingung hat \geq
	$x_j \leq 0$	\leq
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

Betrachte nun die lineare Optimierungsaufgabe für $n \geq 3$:

$$\max \sum_{j=1}^n x_j$$

so dass $x_i + x_j + x_k \leq \frac{15}{2}$ für alle $i, j, k \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, (LP_n)

$x_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- a) Rate eine Lösung von (LP_n).
- b) Rate eine Lösung zu der zu (LP_n) dualen Aufgabe.
 Dazu solltest Du die duale Aufgabe hinschreiben :)
- c) Beweise die Optimalität der unter a) und b) gefundenen Lösungen.
- d) Finde das Optimum von (LP_n), wenn zusätzlich verlangt wird,
 dass alle x_i ganzzahlig sind.

Aufgaben 2.

Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $p := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Formuliere das Problem

$$\min \|Ax - p\|_{\infty} \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \sum_{i=1}^3 x_i = 1$$

als LP-Aufgabe.

Aufgaben 3.

Betrachte einen beliebigen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit $m = |E|$. Ein Matching M von G heisst *inklusions-maximal*, wenn für jede Kante $e \in E \setminus M$ die Menge $M \cup \{e\}$ kein Matching ist. Zeige: Für jedes inklusions-maximale Matching M und jedes Maximum-Kardinalitäts-Matching M' gilt $|M| \geq \frac{1}{2}|M'|$.

Aufgaben 4.

Konstruiere verschiedene duale Paare von linearen Optimierungsproblemen

$\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ und $\min\{b^T y : A^T y = c, y \geq 0\}$ mit den zusätzlichen Eigenschaften, dass

- das primale Problem unbeschränkt ist und das duale unzulässig;
- das primale Problem unzulässig ist und das duale unbeschränkt;
- beide Probleme unzulässig sind.

Abgabe (wegen dem Feiertag am Donnerstag) bis Freitag, den 26. Mai 2017, um 10:00 Uhr in Briefkasten Nr. 18.