Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2017

Cordian Riener
Sebastian Gruler

Kombinatorische Optimierung – Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Sei C ein rationaler polyedrischer Kegel. Wir hatten gesehen, dass C eine Hilbert-Basis besitzt. Zeige: Ist C spitz, dann gibt es eine eindeutige inklusionsminimale Hilbert-Basis. Betrachte dazu die Menge

$$R := \{x \in C \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \, : \, \nexists y, z \in C \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \text{ mit } x = y + z\}$$

aller ganzzahliger Punkte in C die sich nicht trivialerweise als Summe zweier ganzzahliger Punkte aus C darstellen lassen. Zeige, dass R eine Hilbert-Basis ist.

Hinweis: Wenn C spitz ist, dann gibt es $c \in \mathbb{R}^n$ *mit* $C \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, c^t x \geq 0\}$ *und* $C \cap \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, c^t x) = 0\} = \{0\}$.

Aufgabe 2: Sei C ein rationaler spitzer polyederischer Kegel und H eine (eindeutige) minimale Hilbert-Basis. Sei F eine nicht-leere Seitenfläche: Zeige: $H \cap F$ ist eine Hilbert-Basis von F.

Aufgabe 3: Betrachte das Polyeder $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \, : \, y \leq \sqrt{2}x\}$. Zeige, dass P_I kein Polyeder ist.

Aufgabe 4: In den Sommerferien arbeitest Du bei einem Getränkeautomatenhersteller. Ein solcher Getränkeautomat muss Rückgeld geben. Damit der Vorrat an Münzen nicht zu schnell aufgebraucht wird, sollten immer so wenig wie möglich Münzen verbraucht werden. Da niemand ausser Dir kombinatorische Optimierung gehört hat, liegt es an Dir, eine effiziente Möglichkeit für dieses Problem zu finden. Dabei erinnerst Du Dich an den Greedy-Algorithmus:

1. Schreibe einen einfachen Greedy-Algorithmus, um dieses Problem zu lösen.
2. Funktioniert dieser Algorithmus? d.h. liefert der Algorithmus die optimale Lösung?
3. Kannst Du ein Münzsystem finden, bei dem der Algorithmus nicht die optimale Lösung finden würde?

Zusatzaufgabe: Sei $Ax \leq b$, $a^t x \leq \beta$ ein TDI-System, wobei a ein ganzzahliger Vektor ist. Zeige: Dann ist das System $Ax \leq b, a^t x = \beta$ ebenfalls ein TDI-System.

Abgabe bis Donnerstag, den 06. Juli 2017, um 12:00 Uhr in Briefkasten Nr. 18.