Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 16 zur Reellen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 55. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Oberkörper von $\mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass
$$\mathscr{O}_{(K,\leq)} := \{a \in K \mid \exists N \in \mathbb{N} : |a| \leq N\}$$
ein Unterring von K mit einzigem maximalen Ideal
$$\mathfrak{m}_{(K,\leq)} := \left\{a \in K \mid \forall N \in \mathbb{N} : |a| \leq \frac{1}{N}\right\}$$
und Einheitengruppe
$$\mathscr{O}^\times_{(K,\leq)} = \mathscr{O}_{(K,\leq)} \setminus \mathfrak{m}_{(K,\leq)} = \left\{a \in K \mid \exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} \leq |a| \leq N\right\}$$
ist.

(b) Zeige, dass es zu jedem $a \in \mathscr{O}_{(K,\leq)}$ genau ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit $a - b \in \mathfrak{m}_{(K,\leq)}$. Wir nennen dieses b den *Standardteil* von a und notieren es mit $\operatorname{st}(a)$.

(c) Zeige, dass $\mathscr{O}_{(K,\leq)} \to \mathbb{R},\ a \mapsto \operatorname{st}(a)$ ein Ringhomomorphismus mit Kern $\mathfrak{m}_{(K,\leq)}$ ist.

(d) Zeige, dass für alle $a, b \in \mathscr{O}_{(K,\leq)}$ mit $\operatorname{st}(a) < \operatorname{st}(b)$ gilt $a < b$.

Aufgabe 56. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper, den wir mit der Intervalltopologie aus Aufgabe 24 ausstatten.

(a) Zeige, dass durch $a \sim b :\iff \exists N \in \mathbb{N} : (|a| \leq N|b| \;\&\; |b| \leq N|a|)$ für $a, b \in K$ eine Äquivalenzrelation auf K definiert wird. Wir nennen deren Äquivalenzklassen die Archimedizitätsklassen von $(K, \leq)$.

(b) Zeige, dass alle Archimedizitätsklassen von $(K, \leq)$ ausser $\{0\}$ abgeschloffen sind.

Finde einen angeordneten Körper $(K, \leq)$ und eine stetige Funktion $f\colon [-1, 1] \to K$, deren Bild in keinem Intervall $[-a, a]$ mit $a \in K$ enthalten ist.

Aufgabe 57. Sei $f := X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2Z^2 + Z^6 + 1 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ (vergleiche Beispiel 2.4.15(3) aus der Vorlesung).

(a) Zeige, dass es für jedes $R \in \mathbb{R}$ Quadratsummen $s, t \in \sum \mathbb{R}[X, Y, Z]^2$ gibt mit
$$(*) \qquad f = s + t(R^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)).$$

(b) Zeige, dass es kein $D \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass es für jedes $R \in \mathbb{R}$ Quadratsummen $s, t \in \mathbb{R}[X, Y, Z]^2$ vom Grad höchstens D mit $(*)$ gibt.

Abgabe bis Mittwoch, den 9. Mai, um 16:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.