Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Sommersemester 2013 Markus Schweighofer

Übungsblatt 19 zur Reellen Algebraischen Geometrie

Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ versehen mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Ordnung und Topologie. Eine Topologie auf einem K-Vektorraum V heißt eine *Vektorraumtopologie* auf V, wenn bezüglich ihr die Vektoraddition $V \times V \to V,\ (x, y) \mapsto x + y$ und die Skalarmultiplikation $K \times V \to V$ stetig sind ($V \times V$ und $K \times V$ sind dabei natürlich mit den jeweiligen Produkttopologien ausgestattet) und $\{0\}$ abgeschlossen in V ist. Ein topologischer K-Vektorraum ist ein K-Vektorraum zusammen mit einer Vektorraumtopologie.

Aufgabe 66.

(a) Zeige, dass es auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}$ genau eine Vektorraumtopologie gibt.

(b) Zeige, dass es auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ unendlich viele Vektorraumtopologien gibt.

Aufgabe 67. Beantworte folgende Fragen durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

(a) Ist die konvexe Hülle einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ stets wieder kompakt?

(b) Ist die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ stets wieder abgeschlossen?

(c) Ist die konvexe Hülle einer kompakten Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums mit Skalarprodukt stets abgeschlossen?

Aufgabe 68. Zeige, dass für jede abgeschlossene konvexe Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge ihrer Extremalpunkte abgeschlossen ist. Gilt dasselbe für jede abgeschlossene konvexe Menge $A \subseteq \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 69. Zeige, dass eine kompakte Teilmenge eines hausdorffschen topologischen Raumes stets abgeschlossen ist.

Aufgabe 70. Zeige, dass Bilder quasikompakter Mengen unter stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen wieder quasikompakt sind.

Abgabe bis Donnerstag, den 6. Juni, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.