Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 22 zur Reellen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 78. Sei K ein echter Unterkörper von $\mathbb{R}$ und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, der mit der feinsten Vektorraumtopologie ausgestattet sei. Zeige, dass jede kompakte konvexe Teilmenge von V leer oder einelementig ist.

Aufgabe 79. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $f, \ell_1, \ldots, \ell_m \in K[X_1, \ldots, X_n]_1$ und $S := \{x \in K^n \mid \ell_1(x) \geq 0, \ldots, \ell_m(x) \geq 0\} \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(a) $f \geq 0$ auf S

(b) $f \in K_{\geq 0} + K_{\geq 0}\ell_1 + \cdots + K_{\geq 0}\ell_m$

(c) Es gibt $i_1, \ldots, i_s \in \{0, \ldots, m\}$ mit $\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_s}$ linear unabhängig und

$$f \in K_{\geq 0}\ell_{i_1} + \cdots + K_{\geq 0}\ell_{i_s},$$

wobei $\ell_0 := 1$.

Aufgabe 80. Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $A \subseteq V$ konvex und F eine maximale nichttriviale Seite von A. Zeige, dass F exponiert ist.

Aufgabe 81. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $d \in \mathbb{N}$ gerade, $V \subseteq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller d-Formen in n Variablen und $P \subseteq V$ der Kegel der positiv semidefiniten d-Formen in n Variablen. Zeige:

(a) P ist abgeschlossen.

(b) $\mathring{P}$ besteht genau aus den positiv definiten d-Formen in n Variablen.

(c) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist $F_x := \{f \in P \mid f(x) = 0\}$ eine maximale nichttriviale Seite von P.

(d) Für jede maximale nichttriviale Seite F von V gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $F = F_x$.

(e) $\dim F_x = (\dim V) - n$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Abgabe bis Donnerstag, den 27. Juni, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.