

---

Klausur zur Polynomialen Optimierung

---

**Aufgabe 1 (5 Punkte).** Zeichne den Spektraeder

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x & x-y \\ x-y & x \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}.$$

**Aufgabe 2 (10 Punkte).** Betrachte für  $a \in \mathbb{R}$  die lineare Abbildung  $L_a: \mathbb{R}[X]_4 \rightarrow \mathbb{R}$ , die definiert ist durch  $L_a(1) = 1$ ,  $L_a(X) = 0$ ,  $L_a(X^2) = a$ ,  $L_a(X^3) = 0$  und  $L_a(X^4) = 1$ .

(a) Bestimme die Menge

$$S := \{a \in \mathbb{R} \mid L_a(\mathbb{R}[X]_4 \cap \sum \mathbb{R}[X]^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

(b) Finde ein  $a \in S$ , für das  $L_a$  eine Quadraturformel besitzt und gebe eine geeignete Quadraturformel an.

(c) Finde ein  $a \in S$ , für das  $L_a$  keine Quadraturformel besitzt (mit Beweis).

**Aufgabe 3 (10 Punkte).** Welche der folgenden Kegel besitzen eine Einheit? Begründe Deine Aussage!

(a) der Kegel  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  aller Vektoren mit nur nichtnegativen Einträgen im Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ ,

(b) der Kegel  $K := \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq N\}$  der nichtnegativen beschränkten Funktionen auf  $\mathbb{R}$  im Vektorraum  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  aller Funktionen auf  $\mathbb{R}$ ,

(c) der zweite Quadrant  $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  im Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ ,

(d) der Kegel  $\sum \mathbb{R}[X]^2 + \sum \mathbb{R}[X]^2(2X - X^2)$  bestehend aus allen Polynomen der Form  $s + t(2X - X^2)$  mit  $s, t \in \sum \mathbb{R}[X]^2$  (benutze dabei nur in der Vorlesung bewiesene Resultate).

**Aufgabe 4 (10 Punkte).** Betrachte das polynomiale Optimierungsproblem

$$(P) \quad \text{minimiere } x \text{ über } x \in \mathbb{R} \text{ mit } -x^2 \geq 0,$$

seine Momentenrelaxierung  $(P_2)$  vom Grad 2 (also die „erste“ Momentenrelaxierung) und deren Dual  $(D_2)$ .

(a) Bestimme den Optimalwert  $P^*$  von  $(P)$ .

(b) Bestimme den Optimalwert  $P_2^*$  von  $(P_2)$ .

(c) Sei  $L$  eine zulässige Lösung von  $(P_2)$ . Beschreibe alle Quadraturformeln für  $L$ .

(d) Gilt  $P_2^* = D_2^*$ ?

**Bearbeitungszeit:** 90 Minuten.