Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Wintersemester 2012/2013 Markus Schweighofer

Klausur zur Reellen Algebraischen Geometrie I: Lösungsvorschlag

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Es sind maximal 120 Punkte zu erreichen. Für jede Aufgabe gibt es 20 Punkte.

Aufgabe 1. Sei K ein euklidischer Körper. Schreibe

$$f := 4X_1^2 + X_1^4 - 4X_1X_2 - 4X_1^2X_2 + 5X_2^2 \in K[X_1, X_2]$$

als Summe von Quadraten von Polynomen.

Lösungsvorschlag: Wir wenden die Gram-Matrix-Methode an. Für das Newton-Polytop $N(f)$ von f gilt

$$\begin{aligned} N(f) &= \operatorname{conv}\{(2,0),(4,0),(1,1),(2,1),(0,2)\} \\ &= \operatorname{conv}\left\{(2,0),(4,0),\frac{1}{2}(2,0)+\frac{1}{2}(0,2),\frac{1}{2}(4,0)+\frac{1}{2}(0,2),(0,2)\right\} \\ &= \operatorname{conv}\{(2,0),(4,0),(0,2)\} \end{aligned}$$

und daher $\frac{1}{2}N(f) \cap \mathbb{N}_0^2 = \operatorname{conv}\{(1,0),(2,0),(0,1)\} \cap \mathbb{N}_0^2 = \{(1,0),(2,0),(0,1)\}$. Mit $v := \begin{pmatrix} X_1 & X_1^2 & X_2 \end{pmatrix}^T$ gilt daher

$$\{G \in SK^{3\times 3} \mid f = v^TGv\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Betrachte nun die quadratische Form

$$\begin{aligned} q &:= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \\ &= 4T_1^2 - 4T_1T_3 + T_2^2 - 4T_2T_3 + 5T_3^2 \in \mathbb{R}[T_1, T_2, T_3], \end{aligned}$$

für die $q(X_1, X_1^2, X_2) = f$ gilt. Wir diagonalisieren q als quadratische Form:

$$\begin{aligned} q &= (2T_1 - T_3)^2 - T_3^2 + T_2^2 - 4T_2T_3 + 5T_3^2 \\ &= (2T_1 - T_3)^2 + T_2^2 - 4T_2T_3 + 4T_3^2 = (2T_1 - T_3)^2 + (T_2 - 2T_3)^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$f = (2X_1 - X_2)^2 + (X_1^2 - 2X_2)^2.$$

Aufgabe 2. Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Bestimme die genaue Anzahl der positiven und und die genaue Anzahl der negativen Nullstellen folgender Polynome (gezählt *ohne* Vielfachheiten):

(a) $X^5 - 2X^4 + 3X^3 + 9X^2 - X + 5 \in R[X]$

(b) $4X^7 + X^5 + 2X^4 - X^3 + 9X^2 + X + 1 \in R[X]$

Lösungsvorschlag: (a) Für $f := X^5 - 2X^4 + 3X^3 + 9X^2 - X + 5 \in R[X]$ gilt

$$\begin{aligned}(1+X)^2 f &= X^5 - 2X^4 + 3X^3 + 9X^2 - X + 5\\ &\quad + 2X^6 - 4X^5 + 6X^4 + 18X^3 - 2X^2 + 10X\\ &\quad + X^7 - 2X^6 + 3X^5 + 9X^4 - X^3 + 5X^2\\ &= X^7 + 13X^4 + 20X^3 + 12X^2 + 9X + 5\end{aligned}$$

und damit offensichtlich $\mu(f, R_{>0}) = \mu((1+X)^2 f, R_{>0}) = 0$. Weiter

$$f(-X) = -X^5 - 2X^4 - 3X^3 + 9X^2 + X + 5$$

und daher $\#\operatorname{sc}(f(-X), 0) = 1$, was mit der Regel von Descartes $\mu(f(-X), \mathbb{R}_{>0}) = 1$ impliziert. Somit $\mu(f, R_{<0}) = \mu(f(-X), \mathbb{R}_{>0}) = 1$. Es hat also f genau eine negative Nullstelle und keine positive Nullstelle in R.

(b) Für $f := 4X^7 + X^5 + 2X^4 - X^3 + 9X^2 + X + 1 \in R[X]$ gilt

$$(1+X)f = 4X^8 + 4X^7 + X^6 + 3X^5 + X^4 + 8X^3 + 10X^2 + 2X + 1$$

und damit offensichtlich $\mu(f, R_{>0}) = \mu((1+X)f, R_{>0}) = 0$. Weiter

$$\begin{aligned}(1+X)f(-X) &= (1+X)(-4X^7 - X^5 + 2X^4 + X^3 + 9X^2 - X + 1)\\ &= -4X^8 - 4X^7 - X^6 + X^5 + 3X^4 + 10X^3 + 8X^2 + 1\end{aligned}$$

und daher $\#\operatorname{sc}((1+X)f(-X), 0) = 1$, was mit der Regel von Descartes

$$\mu(f, R_{<0}) = \mu(f(-X), R_{>0}) = \mu((1+X)f(-X), R_{>0}) = 1$$

impliziert. Es hat also f wieder genau eine negative und keine positive Nullstelle in R.

Aufgabe 3. Seien R ein reell abgeschlossener Körper, $b \in R$, $f := X^2 + bX + 1 \in R[X]$ und $g := X \in R[X]$.

(a) Berechne die Hermite-Form $H(f,g) \in R[T_1, T_2]$ von f bezüglich g.

(b) Gebe die Hermite-Matrix $M(H(f,g))$ von f bezüglich g an.

(c) Für welche b ist die Hermite-Matrix von f bezüglich g positiv definit?

(d) Für welche b hat f zwei verschiedene positive Nullstellen in R?

Lösungsvorschlag: (a) Die Begleitmatrix C_f von f ist gegeben durch

$$C_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}.$$

Es folgt

$$C_f^2 = C_f C_f = \begin{pmatrix} -1 & b \\ -b & b^2-1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C_f^3 = C_f C_f^2 = \begin{pmatrix} b & 1-b^2 \\ b^2-1 & 2b-b^3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Hermite-Form $H(f,g) = \sum_{i,j=1}^{2} \operatorname{tr}(g(C_f)C_f^{i+j-2})T_iT_j \in K[T_1,T_2]$:

$$H(f,g) = \operatorname{tr}(C_f)T_1^2 + 2\operatorname{tr}(C_f^2)T_1T_2 + \operatorname{tr}(C_f^3)T_2^2 = -bT_1^2 + 2(b^2-2)T_1T_2 + (3b-b^3)T_2^2.$$

(b) $M(H(f,g)) = \begin{pmatrix} -b & b^2-2 \\ b^2-2 & 3b-b^3 \end{pmatrix}$

(c) Man sieht sehr leicht, dass $M(H(f,g))$ positiv definit ist genau dann, wenn $\operatorname{sg} H(f,g) = 2$. Aus dem Jacobi-Kriterium, welches in den Übungen bewiesen wurde, weiß man, dass $\operatorname{sg} H(f,g) = r - 2\#\operatorname{sc}(d_0,d_1,d_2)$ mit $r := \operatorname{rk} H(f,g)$, $d_0 := \det() = \det \emptyset = 1$, $d_1 := \det(-b) = -b$ und $d_2 := \det(M(H(f,g)) = (b^4 - 3b^2) - (b^2-2)^2 = b^2 - 4$. Da nun $M(H(f,g))$ positiv definit ist genau dann, wenn $r = 2$ (also $d_2 \neq 0$) und $\#\operatorname{sc}(d_0,d_1,d_2) = 0$ (also $d_1 \geq 0$ und $d_2 \geq 0$) folgt: $M(H(f,g))$ ist genau dann positiv definit, wenn $b \leq 0$ und $b^2 > 4$, also genau dann, wenn $b < -2$.

(d) Gemäß Vorlesung gilt

$$\operatorname{sg} H(f,g) = \#\{x \in R \mid f(x) = 0, g(x) > 0\} - \#\{x \in R \mid f(x) = 0, g(x) < 0\}.$$

Da f vom Grad 2 ist, gilt offenbar $\#\{x \in R \mid f(x) = 0, g(x) > 0\} = 2$ genau dann, wenn die rechte Seite dieser Gleichung gleich 2 ist. Also

$$b < -2 \overset{(c)}{\iff} H(f,g) \text{ pd} \iff \operatorname{sg} H(f,g) = 2 \iff \#\{x \in R \mid f(x) = 0, x > 0\} = 2.$$

Somit hat f genau dann zwei verschiedene positive Nullstellen in R, wenn $b < -2$.

Aufgabe 4. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle reell abgeschlossenen Körper R? Gebe jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ nimmt jedes Polynom aus $R[X_1, \dots, X_n]$ auf $\{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ ein Maximum an.

(b) Für alle $a, b \in R_{>0}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a \leq Nb$ und $b \leq Na$.

(c) R ist als angeordneter Körper vollständig.

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in R \setminus \{0\} : \forall \varepsilon \in R_{>0} : \exists \delta \in R_{>0} : \forall y \in R \setminus \{0\} :$

$$\left(|x - y| < \delta \implies \left| \frac{1}{x^n} - \frac{1}{y^n} \right| < \varepsilon \right)$$

(e) Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0 in R.

Lösungsvorschlag: (a) Diese Aussage gilt für alle reell abgeschlossenen Körper R. Für $R = \mathbb{R}$ gilt sie, weil die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ kompakt ist und Polynomfunktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ stetig sind. Wir übertragen sie nun mit dem Tarski-Prinzip auf beliebige reell abgeschlossene Körper R. Hierzu reicht es zu zeigen, dass für alle $n, d \in \mathbb{N}_0$ mit $I_{n,d} := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq d\}$

$$S_{n,d} := \Bigg\{ R \in \mathscr{R} \mid \forall (a_\alpha)_{\alpha \in I} \in R^I : \exists x \in R^n : \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \;\&\; \forall y \in R^n : \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 1 \implies f(y) \leq f(x) \right) \right) \Bigg\}$$

eine semialgebraische Klasse ist, denn dann gilt wegen $\mathbb{R} \in S_{n,d}$ insbesondere $S_{n,d} \neq \emptyset$ und damit sogar $S_{n,d} = \mathscr{R}$ wegen der reellen Quantorenelimination. Seien hierzu $n, d \in \mathbb{N}_0$ fest und setze $I := I_{n,d}$. Mit $(\#I) + n$-facher Anwendung der reellen Quantorenelimination reicht es zu zeigen, dass $S' \cap S''$ semialgebraisch ist mit

$$S' := \left\{ (R, (a_\alpha)_{\alpha \in I}, x) \in \mathscr{R}^{(\#I)+n} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\} \text{ und}$$

$$S'' := \left\{ (R, (a_\alpha)_{\alpha \in I}, x) \in \mathscr{R}^{(\#I)+n} \mid \forall y \in R^n : \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 1 \implies \sum_{\alpha \in I} a_\alpha x^\alpha \leq \sum_{\alpha \in I} a_\alpha y^\alpha \right) \right\}.$$

Dass S' semialgebraisch ist, ist trivial. Für S'' folgt dies mit n-facher Anwendung der

Quantorenelimination aus der Tatsache, dass

$$\left\{(R,(a_\alpha)_{\alpha\in I},x,y)\in\mathscr{R}^{(\#I)+2n}\mid\sum_{i=1}^n y_i^2\leq 1\implies\sum_{\alpha\in I}a_\alpha x^\alpha\leq\sum_{\alpha\in I}a_\alpha y^\alpha\right\}=$$
$$\left(\complement\left\{(R,(a_\alpha)_{\alpha\in I},x,y)\in\mathscr{R}^{(\#I)+2n}\mid 1-\sum_{i=1}^n y_i^2\geq 0\right\}\right)\cup$$
$$\left\{(R,(a_\alpha)_{\alpha\in I},x,y)\in\mathscr{R}^{(\#I)+2n}\mid\sum_{\alpha\in I}a_\alpha y^\alpha-\sum_{\alpha\in I}a_\alpha x^\alpha\geq 0\right\}$$

semialgebraisch ist.

(b) Diese Aussage gilt nicht für alle reell abgeschlossenen Körper R. Aus der Vorlesung wissen wir nämlich, dass es auf $\mathbb{R}(X)$ eine Anordnung P_∞ gibt mit $N\leq_{P_\infty}X$ für alle $N\in\mathbb{N}$. Dann ist $R:=\overline{(\mathbb{R}(X),P_\infty)}$ ein reell abgeschlossener Körper mit $N\leq X$ in R für alle $N\in\mathbb{N}$. Setzt man nun $a:=X$ und $b:=1$, so gibt es kein $N\in\mathbb{N}$ mit $a\leq Nb$, denn für so ein N wäre gleichzeitig $Nb=N\leq X=a$ und somit $X=a=Nb=N$, was absurd ist.

(c) Diese Aussage gilt nicht für alle reell abgeschlossenen Körper R. Sie gilt nämlich laut Vorlesung in einem reell abgeschlossenen Körper R genau dann, wenn dieser isomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Nicht jeder reell abgeschlossene Körper ist aber isomorph zu $\mathbb{R}$, denn sonst würde (b) offensichtlich für jeden reell abgeschlossenen Körper R gelten, was nicht der Fall ist, wie wir schon gesehen haben.

(d) Diese Aussage gilt für alle reell abgeschlossenen Körper R. Für $R=\mathbb{R}$ gilt sie, weil für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Funktion $\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{1}{x^n}$ stetig ist. Wir übertragen sie nun mit dem Tarski-Prinzip auf beliebige reell abgeschlossene Körper R. Hierzu reicht es zu zeigen, dass für alle $n\in\mathbb{N}$

$$S_n:=\left\{R\in\mathscr{R}\mid\forall x\in R\setminus\{0\}:\forall\varepsilon\in R_{>0}:\exists\delta\in R_{>0}:\forall y\in R\setminus\{0\}:\right.$$
$$\left.\left(|x-y|<\delta\implies\left|\frac{1}{x^n}-\frac{1}{y^n}\right|<\varepsilon\right)\right\}$$

eine semialgebraische Klasse ist, denn dann gilt wegen $\mathbb{R}\in S_n$ insbesondere $S_n\neq\emptyset$ und damit sogar $S_n=\mathscr{R}$ wegen der reellen Quantorenelimination. Ähnlich wie in (b) zeigt man durch vierfache Anwendung der reellen Quantorenelimination, dass es für fixiertes $n\in\mathbb{N}$ reicht zu zeigen, dass $S'\cup S''$ semialgebraisch ist mit

$$S':=\{(R,x,\varepsilon,\delta,y)\in\mathscr{R}^4\mid|x-y|\geq\delta\}\text{ und}$$
$$S'':=\left\{(R,x,\varepsilon,\delta,y)\in\mathscr{R}^4\mid x\neq 0,y\neq 0,\left|\frac{1}{x^n}-\frac{1}{y^n}\right|<\varepsilon\right\}.$$

Nun gilt aber

$$S' = \{(R,x,\varepsilon,\delta,y) \in \mathscr{R}^4 \mid x - y \geq \delta\} \cup \{(R,x,\varepsilon,\delta,y) \in \mathscr{R}^4 \mid y - x \geq \delta\} \text{ und}$$

$$S'' = \underbrace{\left\{(R,x,\varepsilon,\delta,y) \in \mathscr{R}^4 \mid x \neq 0, y \neq 0, \frac{1}{x^n} - \frac{1}{y^n} < \varepsilon\right\}}_{S'''} \cap \underbrace{\left\{(R,x,\varepsilon,\delta,y) \in \mathscr{R}^4 \mid x \neq 0, y \neq 0, \frac{1}{y^n} - \frac{1}{x^n} < \varepsilon\right\}}_{S''''},$$

womit klar ist, dass S' semialgebraisch ist. Schließlich zeigen wir, dass S''' semialgebraisch ist, denn dann ist analog auch S'''' semialgebraisch. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} S''' = &\{(R,x,\varepsilon,\delta,y) \in \mathscr{R}^4 \mid x > 0, y > 0, y^n - x^n < \varepsilon x^n y^n\} \cup \\ &\{(R,x,\varepsilon,\delta,y) \in \mathscr{R}^4 \mid x > 0, y < 0, y^n - x^n > \varepsilon x^n y^n\} \cup \\ &\{(R,x,\varepsilon,\delta,y) \in \mathscr{R}^4 \mid x < 0, y > 0, y^n - x^n > \varepsilon x^n y^n\} \cup \\ &\{(R,x,\varepsilon,\delta,y) \in \mathscr{R}^4 \mid x < 0, y < 0, y^n - x^n < \varepsilon x^n y^n\}. \end{aligned}$$

(e) Diese Aussage gilt nicht für alle reell abgeschlossenen Körper R. Wähle nämlich wie in (b) einen reell abgeschlossenen Körper R, in dem es ein Element $a \in R$ gibt mit $N < a$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu $\varepsilon := 1/a \in R_{>0}$ kein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Für ein solches $N \in \mathbb{N}$ wäre nämlich insbesondere $\frac{1}{N} < \varepsilon$ und daher $N + 1 < a < N$.

Aufgabe 5. Unten finden Sie eine „Beweisskizze“ für die wahre Tatsache, dass sich jede Anordnung von $\mathbb{Q}(X)$ auf $\mathbb{R}(X)$ fortsetzen lässt. Kommentieren Sie jeden der Schritte (1)–(8): Wird etwas falsches behauptet? Ist der Schritt nachvollziehbar? Wenn ja, wie kann man ihn detaillieren falls notwendig? Wenn nein, warum ist hier eine ernsthafte Lücke?

„Beweisskizze:“ Sei $Q \in \operatorname{sper} \mathbb{Q}(X)$.

(1) Es ist zu zeigen, dass es ein $P \in \operatorname{sper} \mathbb{R}(X)$ gibt mit $Q = P \cap \mathbb{Q}(X)$.

(2) Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\begin{aligned} \Phi\colon \operatorname{sper} \mathbb{R}(X) &\to \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, t] \mid t \in \mathbb{R}\} \\ P &\mapsto \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq_P X\} \end{aligned}$$

bijektiv ist.

(3) Setze wie in der Vorlesung $P_{-\infty} := \Phi^{-1}(\emptyset)$, $P_{\infty} := \Phi^{-1}(\mathbb{R})$ und $P_{t-} := \Phi^{-1}((-\infty, t))$ sowie $P_{t+} := \Phi^{-1}((-\infty, t])$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(4) Unter Benutzung der Vollständigkeit des angeordneten Körpers der reellen Zahlen zeigt man leicht, dass $C := \{a \in \mathbb{R} \mid \exists q \in \mathbb{Q} : a \leq_{\mathbb{R}} q \leq_Q X\}$ ein Element des Wertebereichs von Φ ist.

(5) Gilt $C = \emptyset$, so zeigt man leicht $Q = P_{-\infty} \cap \mathbb{Q}(X)$.

(6) Gilt $C = \mathbb{R}$, so zeigt man leicht $Q = P_{\infty} \cap \mathbb{Q}(X)$.

(7) Gilt $C = (-\infty, t)$ für ein $t \in \mathbb{R}$, so zeigt man leicht $Q = P_{t-} \cap \mathbb{Q}(X)$.

(8) Gilt $C = (-\infty, t]$ für ein $t \in \mathbb{R}$, so zeigt man leicht $Q = P_{t+} \cap \mathbb{Q}(X)$.

Lösungsvorschlag: (1) ist einfach nur die Anwendung der Definition der Fortsetzbarkeit einer Anordnung. Dieser Schritt ist korrekt und unmittelbar nachvollziehbar. Er muss und kann nicht detailliert werden.

(2) wurde in der Tat in der Vorlesung detailliert, korrekt und nachvollziehbar ausgeführt. Er muss deswegen hier nicht weiter ausgeführt werden.

In (3) werden einfach nur Bezeichnungen für die Elemente in $\operatorname{sper} \mathbb{R}(X)$ eingeführt unter Beachtung der Tatsache, dass Φ bijektiv ist. Dieser Schritt ist natürlich korrekt und nachvollziehbar. Er muss und kann nicht detailliert werden.

Schritt (4) ist korrekt und nachvollziehbar. Man kann ihn wie folgt detaillieren: Ist $C \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, so sind wir fertig. Gelte also $C \notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Dann ist C nichtleer und nach oben beschränkt, denn wäre C nicht nach oben beschränkt, so wäre $C = \mathbb{R}$, wie man leicht sieht. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert damit $t := \sup C \in \mathbb{R}$. Gilt $t \in C$, so sieht man sofort $C = (-\infty, t]$. Gilt hingegen $t \notin C$, so zeigt man leicht $C = (-\infty, t)$.

Schritt (5) ist ebenfalls korrekt und nachvollziehbar. Auch ihn sollte man detaillieren: Gelte $C = \emptyset$. Dann $X \leq_Q -N$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Ebenso gilt natürlich $X \leq_{P_{-\infty}} -N$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es reicht daher zu zeigen, dass für alle $p, q \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ das Vorzeichen $\operatorname{sgn}_\leq(\frac{p}{q})$ von $\frac{p}{q}$ bezüglich $\leq$ dasselbe ist für alle Anordnungen $\leq$ von $\mathbb{Q}(X)$ mit $X \leq -N$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es gilt aber $\operatorname{sgn}_\leq(\frac{p}{q}) = \operatorname{sgn}_\leq(pq)$ für solche p, q und $\leq$. Es reicht daher zu zeigen, dass für alle $f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ das Vorzeichen $\operatorname{sgn}_\leq(f)$ dasselbe ist für alle Anordnungen $\leq$ von $\mathbb{Q}(X)$ mit $X \leq -N$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Sei hierzu $\leq$ eine solche Anordnung von $\mathbb{Q}(X)$. Schreibe $f = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots a_d \in \mathbb{Q}$ mit $a_d \neq 0$. Wegen $X < 0$ gilt dann $\operatorname{sgn}(f) = \operatorname{sgn}(a_d X^d) \operatorname{sgn}(a_d^{-1} X^{-d} f) = (\operatorname{sgn} a_d)(-1)^d \operatorname{sgn}(\sum_{i=0}^d \frac{a_i}{a_d} X^{i-d}) = (-1)^d (\operatorname{sgn} a_d)$, denn $\sum_{i=0}^d \frac{a_i}{a_d} X^{i-d} = 1 + \sum_{i=0}^{d-1} \frac{a_i}{a_d} X^{i-d} \geq 1 - \sum_{i=0}^{d-1} |\frac{a_i}{a_d} X^{i-d}| \geq 1 - \sum_{i=0}^{d-1} N |X|^{i-d} \geq 1 - \sum_{i=0}^{d-1} N(N(d+1))^{i-d} \geq 1 - \sum_{i=0}^{d-1} N(N(d+1))^{-1} = 1 - \frac{d}{d+1} > 0$, wenn $N \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, dass $|\frac{a_i}{a_d}| \leq N$ für alle $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, denn $\frac{1}{|X|} \leq \frac{1}{N(d+1)}$.

Auch Schritt (6) ist korrekt und nachvollziehbar. Man detailliert ihn analog zu Schritt (5).

In Schritt (7) wird etwas falsches behauptet. Hier ist ein Gegenbeispiel: Nehme $Q := P_{\sqrt{2}+} \cap \mathbb{Q}(X)$. Dann gilt $C = (-\infty, \sqrt{2})$ aber nicht $Q = P_{\sqrt{2}-} \cap \mathbb{Q}(X)$, denn $X^2 - 2 \in P_{\sqrt{2}+} \cap \mathbb{Q}(X) = Q$, aber $X^2 - 2 \notin P_{\sqrt{2}-}$.

Schritt (8) ist korrekt, aber nicht leicht nachvollziehbar. Er muss detailliert werden. Gelte $C = (-\infty, t]$ mit $t \in \mathbb{R}$. Wegen $t \in C$ gibt es dann $q \in \mathbb{Q}$ mit $t \leq_\mathbb{R} q \leq_Q X$. Dann gilt auch $q \leq_\mathbb{R} q \leq_Q X$ und damit $q \in C = (-\infty, t]$. Also $q \leq_\mathbb{R} t \leq_\mathbb{R} q$ und daher $t = q \in \mathbb{Q}$. Da der eindeutig bestimmte $\mathbb{R}$-Automorphismus von $\mathbb{R}(X)$, der X auf $X - t$ abbildet, wegen $t \in \mathbb{Q}$ eingeschränkt auf $\mathbb{Q}(X)$ der eindeutig bestimmte $\mathbb{Q}$-Automorphismus von $\mathbb{Q}(X)$ ist, der X auf $X - t$ abbildet, kann man ohne Einschränkung $t = 0$ und damit $C = (-\infty, 0]$ annehmen. Dann gilt $0 \leq_Q X \leq_Q \frac{1}{N}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Ohnehin hat man $0 \leq_{P_{0+}} X \leq_{P_{0+}} \frac{1}{N}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Nun zeigt man analog zu Schritt (6) (ersetze im Wesentlichen X durch $\frac{1}{X}$), dass $Q = P_{0+} \cap \mathbb{Q}(X)$.

Bemerkung: Insgesamt ist diese „Beweisskizze" meilenweit von einem echten Beweis entfernt. Die Fallunterscheidung nach der Gestalt der Menge C ist unbrauchbar, da man im Falle $C = (-\infty, t)$ für ein $t \in \mathbb{R}$ nicht sagen kann, ob $Q = P_{t-} \cap \mathbb{Q}(X)$, $Q = P_{t+} \cap \mathbb{Q}(X)$ oder beides gilt. Der Fall $C = (-\infty, t]$ für ein $t \in \mathbb{R}$ ist ein sehr spezieller Fall, denn er tritt nur auf, wenn $t \in \mathbb{Q}$ wie gesehen. Diese Aufgabe wurde gestellt, da niemand den Auftrag erfüllte, seine eigene Lösung der entsprechenden Übungsaufgabe noch einmal schriftlich zu kritisieren.

Aufgabe 6. Für welche $P \in \operatorname{sper} \mathbb{R}[X]$ ist $C_P := (\operatorname{sper} \mathbb{R}[X]) \setminus \{P\}$ eine konstruierbare Teilmenge des reellen Spektrums von $\mathbb{R}[X]$?

Lösungsvorschlag: Gemäß Vorlesung ist die Entspektrifizierung

$$\pi \colon \mathscr{C}_{\mathbb{R}[X]} \to \mathscr{S}_{1,R},\ C \mapsto \{t \in \mathbb{R} \mid P_t \in C\}$$

ein Isomorphismus zwischen den booleschen Algebren $\mathscr{C}_{\mathbb{R}[X]}$ der konstruierbare Teilmengen des reellen Spektrums von $\mathbb{R}[X]$ und der semialgebraischen Teilmengen von $\mathbb{R}$, wobei $P_t := \{p \in \mathbb{R}[X] \mid p(t) \geq 0\} \in \operatorname{sper} \mathbb{R}[X]$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Sei zunächst $P \notin \{P_t \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wäre dann $C_P \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}[X]}$, hätte man offensichtlich $\pi(C_P) = \pi(\operatorname{sper} \mathbb{R}[X])$, woraus $C_P = \operatorname{sper} \mathbb{R}[X]$ folgen würde, was absurd ist. Es ist also dann $C_P \notin \mathscr{C}_{\mathbb{R}[X]}$.

Sei nun $t \in \mathbb{R}$. Wir zeigen dann $C_{P_t} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}[X]}$. Dazu reicht es zu zeigen, dass

$$C_{P_t} = \{P \in \operatorname{sper} \mathbb{R}[X] \mid X - t \notin \operatorname{supp} P\},$$

denn dann $C_{P_t} = \complement(\{P \in \operatorname{sper} \mathbb{R}[X] \mid X - t \in P\} \cap \{P \in \operatorname{sper} \mathbb{R}[X] \mid t - X \in P\}) \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}[X]}$. Genauso gut können wir

$$\{P_t\} = \{P \in \operatorname{sper} \mathbb{R}[X] \mid X - t \in \operatorname{supp} P\}$$

zeigen, wobei „$\subseteq$" trivial ist. Um „$\supseteq$" zu zeigen, sei $P \in \operatorname{sper} \mathbb{R}[X]$ mit $X - t \in \operatorname{supp} P$. Sei $p \in \mathbb{R}[X]$. Es ist zu zeigen, dass $p \in P \iff p(t) \geq 0$. Nun gilt $p = p(X) \equiv_{(X-t)} p(t)$ und damit $p - p(t) \in (X - t) \subseteq \operatorname{supp} P$. Daraus folgt $p \in P \iff p(t) \in P \iff p(t) \in P \cap \mathbb{R} \iff p(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \iff p(t) \geq 0$.

Zusammenfassend sieht man also: Ist $P \in \operatorname{sper} \mathbb{R}[X]$, so ist C_P genau dann eine konstruierbare Teilmenge des reellen Spektrums von $\mathbb{R}[X]$, wenn $P = P_t$ für ein $t \in \mathbb{R}$.