Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.
Falls Du einen Computer zur Verfügung hast, installiere dort das frei erhältliche Computeralgebrasystem `SINGULAR`:

`http://www.singular.uni-kl.de/`

Andernfalls verschaffe Dir Zugang zu in einem Rechnerpool, auf dem `SINGULAR` installiert ist, etwa den PhyMa-Pool:

`http://www.phyma.uni-konstanz.de/`

Versuchen nach der Installation, Dich ein wenig mit dem Programm vertraut zu machen, etwa indem Du Abschnitt 2.3 “Getting started” des Online Manuals auf der `SINGULAR`-Homepage durcharbeitest. (Du musst nicht alle dort vorkommende Mathematik verstehen und auch nichts abgeben!)

Aufgabe 2.
Seien R und A Ringe. Zeige, dass die Zuordnungen

$$\bullet \mapsto \begin{pmatrix} R & \to & A \\ r & \mapsto & r \bullet 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R \times A & \to & A \\ (r,a) & \mapsto & \alpha(r)a \end{pmatrix} \hookleftarrow \alpha$$

eine Bijektion vermitteln zwischen der Menge der Skalarmultiplikationen $R \times A \to A$, die A zu einer R-Algebra machen, und der Menge der Ringhomomorphismen $R \to A$.

Aufgabe 3.
Sei A ein kommutativer Ring und I ein Ideal. Zeige

$$I = \sqrt{I} \iff \forall a \in A : (a^2 \in I \implies a \in I).$$

Aufgabe 4.
Sei A ein kommutativer Ring und I ein Ideal. Ist dann $\sqrt[2]{I} := \{a \in A \mid a^2 \in I\}$ stets ein Ideal?

Aufgabe 5.
Sei A ein kommutativer Ring und I und J ein Ideal in A. Zeige oder finde ein Gegenbeispiel für:

(a) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

(b) $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$

(c) $\sqrt{I} = A \iff I = A$

(d) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$

Abgabe bis Montag, den 24. Oktober 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.