
Übungsblatt 8 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.

Sei $\varphi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ ein K -Morphismus, $\varphi^*: K[Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow K[X_1, \dots, X_n]$ der zugehörige K -Algebrenhomomorphismus der Koordinatenringe und $I \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist $V((\varphi^*)^{-1}(I))$ der Zariskiabschluss von $\varphi(V(I))$, also

$$V((\varphi^*)^{-1}(I)) = \overline{\varphi(V(I))}.$$

Aufgabe 2.

Sei K ein Körper, $F := \{X^2 - Y, X^3 - Z\} \subseteq K[X, Y, Z]$ und $I := (F)$. Führe per Hand den Buchberger-Algorithmus aus, um F zu einer Gröbnerbasis von I zu erweitern bezüglich der Monomordnung (a) \leq_{lex} , (b) $\leq_{\text{lex}}^{\text{deg}}$ und (c) $\leq_{\text{revlex}}^{\text{deg}}$.

Aufgabe 3.

Auf einer Karte von Deutschland sollen die 16 Bundesländer so eingefärbt werden, dass je zwei benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.

- (a) Ist dies mit nur drei Farben möglich?
- (b) Zeige, dass es mit vier Farben (blau, rot, gelb und grün) möglich ist, wobei jede Farbe für genau vier Länder verwendet wird und Bayern blau, Baden-Württemberg gelb und Niedersachsen rot eingefärbt wird.
- (c) Was für Farben kommen bei einer Färbung wie in (b) für Berlin in Frage?
- (d) Färbe mit Buntstiften¹ eine Deutschlandkarte wie in (b) beschrieben ein.

Hinweis: Ordne jedem Bundesland eine Variable zu und interpretiere die Farben als dritte bzw. vierte Einheitswurzeln in einem geeigneten Körper wie zum Beispiel \mathbb{C} . Finde geeignete polynomiale Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, welche die oben genannten Bedingungen ausdrücken und berechne eine Gröbnerbasis, um die Lösbarkeit des Systems zu überprüfen. Benutze dazu **SINGULAR** und stöbere hierzu im Manual [<http://www.singular.uni-kl.de/Manual/3-1-3/>] unter anderem die Abschnitte 2.3, 3.7 und A.2.1 durch. Falls die Rechenzeiten länger als ein paar Sekunden sind, denke daran, vielleicht über einem geeigneten *endlichen* Grundkörper zu rechnen. Beachte, dass Rechenzeiten je nach gewähltem Grundkörper zwischen Millisekunden und Tagen schwanken können!

Abgabe bis Montag, den 12. Dezember 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.

¹oder Wachsmalkreiden