Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

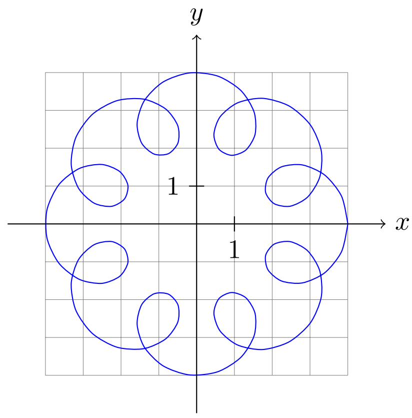
Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.
Finde ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X_1, X_2] \setminus \{0\}$ derart, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$$

die Gestalt der rechts gezeichneten Menge hat oder zumindest eine Menge dieser Gestalt enthält. Benutze dazu Satz 2.7.5(c) aus der Vorlesung und `SINGULAR`. Folgendes Codefragment kann dabei hilfreich sein:




```
ring R=0,(i,x1,x2,y1,y2),lp;
ideal J=(i^2+1);
map conj=R,-i,x1,x2,y1,y2;
proc Re(poly p) {return(reduce((p+conj(p))/2,J))};
proc Im(poly p) {return(reduce(-i*(p-conj(p))/2,J))};
```

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper, $f \in K[\underline{X}]$ und $I := (f)$ Zeige: f homogen $\iff$ I homogen.

Aufgabe 3.
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und C ein algebraisch abgeschlossener Körper,

$$\pi \colon C^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n, (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n],$$
$$\varphi_i \colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_i : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$$

und $U_i := \varphi_i(\mathbb{A}^n)$ für $i \in \{0, \dots, n\}$.

(a) Zeige $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$.

(b) Zeige, dass φ_i für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{A}^n$ und U_i ist.

(c) Sei $\emptyset \neq \ell \subseteq \mathbb{P}^n$. Zeige dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

  (i) l ist irreduzibel (bzgl. der Zariskitopologie auf $\mathbb{P}^n$) und für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ ist $\varphi_i^{-1}(\ell)$ leer oder eine Gerade in $\mathbb{A}^n$, d.h. von der Form $\{\lambda x + (1 - \lambda) y \mid \lambda \in C\}$ für gewisse $x, y \in \mathbb{A}^n$ mit $x \neq y$.

  (ii) Es gibt einen zweidimensionalen Untervektorraum L des C-Vektorraums C^{n+1} mit

$$\ell = \pi(L \setminus \{0\}).$$

  Gelten diese äquivalenten Bedingungen, so nennen wir ℓ eine *Gerade* in $\mathbb{P}^n$.

(d) Zeige, dass sich in $\mathbb{P}^2$ zwei verschiedene Geraden jeweils in genau einem Punkt schneiden.

(e) Betrachte die projektive Varietät $V := V_+(X_0^2 + X_1^2 - X_2^2) \subseteq \mathbb{P}^2$. Zeichne $\varphi_i^{-1}(V) \cap \mathbb{R}^2$ für $i \in \{0, 1, 2\}$.

(f) Überzeuge Dich, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi_2^{-1}(V)$ die Vereinigung zweier zusammenhängender Mengen Z_1 und Z_2 ist (bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$) und male $\varphi_0^{-1}(\varphi_2(Z_1))$.

Abgabe bis Montag, den 23. Januar 2012, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.