Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 13 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.
Im folgenden verwenden wir die Notation aus Aufgabe 3 auf dem letzen Blatt, wobei $n = 2$ und $C = \mathbb{C}$. Sei $f = \frac{1}{T^2-4} \in \mathbb{C}(T)$. Betrachte f als Abbildung von $\mathbb{A}^1 \setminus \{\pm 2\}$ nach $\mathbb{A}^1$ und bezeichne $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ den Graphen von f.

(a) Zeige, dass $\Gamma(f)$ eine irreduzible affine $\mathbb{C}$-Varietät ist.

(b) Sei V der projektive Abschluss von $\Gamma(f)$. Dabei identifizieren wir $\mathbb{A}^2$ mit U_0. Bestimme $x, y \in \mathbb{P}^2$ derart, dass $V \setminus \Gamma(f) = \{x, y\}$.

(c) Sei außerdem $z := (0, f(0)) \in \mathbb{A}^2$. Zeichne jeweils $\varphi_i^{-1}(V) \cap \mathbb{R}^2$ für $i \in \{0, 1, 2\}$ und skizziere jeweils die Lage von x, y und z.

(d) Finde einen (Vektorraum-)Automorphismus Φ von $\mathbb{C}^3$ und eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^3 \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

kommutiert und dass $\varphi(x) = (-1, 0)$ und $\varphi(y) = (1, 0)$ als Punkte in $\mathbb{A}^2 = U_0$ aufgefasst und zeichne $\varphi(V) \cap \mathbb{R}^2$, wobei $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{A}^2 = U_0 \subseteq \mathbb{P}^2$.

Aufgabe 2. (Fortsetzung von Aufgabe 1 auf Blatt 12)
Erkläre sehr ausführlich und im Detail, warum verschiedene Resultate aus der Vorlesung zusammen mit dem `SINGULAR`-Code auf der Rückseite dieses Blatts zeigen, dass

$$\begin{aligned}
&\{(3\cos\varphi + \cos(9\varphi), 3\sin\varphi + \cos(9\varphi)) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\} = \\
&\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^{18} + 9y_1^{16}y_2^2 - 18y_1^{16} + 36y_1^{14}y_2^4 - 144y_1^{14}y_2^2 + 27y_1^{14} + 84y_1^{12}y_2^6 - 504y_1^{12}y_2^4 \\
&+ 189y_1^{12}y_2^2 + 150y_1^{12} + 126y_1^{10}y_2^8 - 1008y_1^{10}y_2^6 + 567y_1^{10}y_2^4 + 900y_1^{10}y_2^2 + 873y_1^{10} + 126y_1^8y_2^{10} \\
&- 1260y_1^8y_2^8 + 945y_1^8y_2^6 + 2250y_1^8y_2^4 + 4365y_1^8y_2^2 - 34128y_1^8 + 84y_1^6y_2^{12} - 1008y_1^6y_2^{10} + 945y_1^6y_2^8 \\
&+ 3000y_1^6y_2^6 + 8730y_1^6y_2^4 + 1123200y_1^6y_2^2 + 30720y_1^6 + 36y_1^4y_2^{14} - 504y_1^4y_2^{12} + 567y_1^4y_2^{10} + 2250y_1^4y_2^8 \\
&+ 8730y_1^4y_2^6 - 2724192y_1^4y_2^4 + 92160y_1^4y_2^2 + 147456y_1^4 + 9y_1^2y_2^{16} - 144y_1^2y_2^{14} + 189y_1^2y_2^{12} \\
&+ 900y_1^2y_2^{10} + 4365y_1^2y_2^8 + 1123200y_1^2y_2^6 + 92160y_1^2y_2^4 + 294912y_1^2y_2^2 + y_2^{18} - 18y_2^{16} + 27y_2^{14} + 150y_2^{12} \\
&+ 873y_2^{10} - 34128y_2^8 + 30720y_2^6 + 147456y_2^4 - 16777216 = 0\}.
\end{aligned}$$

```
LIB "poly.lib"; // for having the "substitute" command
proc Re(poly p) {return(reduce((p+conj(p))/2,J))} // real part
proc Im(poly p) {return(reduce(-ii*(p-conj(p))/2,J))} // imaginary part

ring R=0,(ii,x0,x1,x2,y1,y2),lp;
ideal J=ii^2+1; // imaginary unit
map conj=R,-ii,x0,x1,x2,y1,y2; // complex conjugation
poly f1=3*x1*x0^8+Re((x1+ii*x2)^9);
poly f2=3*x2*x0^8+Im((x1+ii*x2)^9);
poly g=x1^2+x2^2-x0^2;
ideal I=f1-x0^9*y1,f2-x0^9*y2,g; // homogeneous in the x-variables

/* projective elimination of the x-variables */
ideal G0=groebner(substitute(I,x0,1));
ideal G1=groebner(substitute(I,x1,1));
ideal G2=groebner(substitute(I,x2,1));
int i;
for (i=1; i<=size(G0); i++) {print(variables(G0[i]),"%s");}
for (i=1; i<=size(G1); i++) {print(variables(G1[i]),"%s");}
for (i=1; i<=size(G2); i++) {print(variables(G2[i]),"%s");}
G0[1]==G1[1];
G0[1]==G2[1];
G0[1]; // the polynomial defining the projection on the y-space

/* exclude solutions at infinity */
groebner(substitute(I,x0,0));

/* exclude non-real solutions */
substitute(f2,x1,y1,x2,y2)==substitute(f1,x1,y2,x2,y1); // detect symmetry
ring A=0,(ii,a,b,c,d),lp;
map conj=A,-ii,a,b,c,d; // complex conjugation
map phi=R,ii,1,a+b*ii,c+d*ii,0,0;
ideal J=ii^2+1; // imaginary unit
ideal K=Im(phi(f1)),Im(phi(f2)),Re(phi(g)),Im(phi(g));
ideal H=groebner(K);
H[1];
```

Abgabe bis Montag, den 30. Januar 2012, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.