Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 14 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (Fortsetzung der letzten zwei Blätter)
Bearbeite Aufgabe 1 auf Blatt 12 und Aufgabe 2 auf Blatt 13 diesmal mit Satz 3.4.24 aus der Vorlesung. Die Codeschnipsel

```
ring R=0,(ii,x1,x2,y1,y2),(dp(3),dp);
ring R1=0,(x0,x1,x2,y1,y2),(a(1,1,1,0,0),dp);
ideal H=subst(homog(imap(R,G),x0),x0,0);
```

können dabei hilfreich sein.

Aufgabe 2.
Zeige, dass eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{P}^n$ des n-dimensionalen projektiven Raumes genau dann eine projektive K-Varietät ist, wenn ihr Schnitt mit jeder der $n+1$ affinen Karten eine affine K-Varietät des $\mathbb{A}^n$ ist (das heißt mit der Notation von Blatt 12: $\varphi_i^{-1}(M \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n$ ist eine affine K-Varietät für alle $i \in \{0,\dots,n\}$).

Aufgabe 3.
Hier soll die Aussage aus Aufgabe 4(c) von Blatt 12 erneut und etwas erweitert bewiesen werden. Wir verwenden dazu dieselbe Notation wie dort und identifizieren U_i durch φ_i^{-1} mit $\mathbb{A}^n$. Weiter bezeichnen wir eine Abbildung φ wie in Aufgabe 1(d) auf dem letzten Blatt als linearen Automorphismus des $\mathbb{P}^n$. Sei nun $\emptyset \neq \ell \subseteq \mathbb{P}^n$.

(a) Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:
  (i) Für alle $i \in \{0,\dots,n\}$ ist $U_i \cap \ell$ leer oder endliche Vereinigung von Geraden.
  (ii) Es gibt endlich viele 2-dimensionale Untervektorräume $L_1,\dots,L_k$ des C-Vektorraums C^{n+1} mit
$$\ell = \pi((L_1 \cup \dots \cup L_k) \setminus \{0\}).$$

(b) Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:
  (i) ℓ ist irreduzibel bzgl. der C-Zariskitopologie auf $\mathbb{P}^n$ und für alle $i \in \{0,\dots,n\}$ ist $U_i \cap \ell$ leer oder eine Gerade.
  (ii) Für jeden linearen Automorphismus φ des $\mathbb{P}^n$ ist $U_0 \cap \varphi(\ell)$ leer oder eine Gerade.
  (iii) Es gibt einen 2-dimensionalen Untervektorraum L des C-Vektorraums C^{n+1} mit
$$\ell = \pi(L \setminus \{0\}).$$

Abgabe bis Montag, den 06. Februar 2012, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.