Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie II

Blatt 2

Aufgabe 54
Die *Prüfer-Gruppe* ist die topologische Gruppe
$$\hat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$
wobei $\pi_{nm} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $m|n$ die natürliche Projektion ist. Zeigen Sie, dass $G_K \cong \hat{\mathbb{Z}}$ für jeden endlichen Körper K.

Aufgabe 55
Gibt es eine Galoiserweiterung $L|K$ mit $\mathrm{Gal}(L|K) \cong \mathbb{Z}$ (als abstrakte Gruppen)?

Aufgabe 56
Beweisen Sie das Schlangenlemma IV.2.12 mit allen Details.

Aufgabe 57
Seien $f, g : (C, d) \to (C', d')$ Homomorphismen von Kettenkomplexen. Eine *Kettenhomotopie* von f nach g ist ein Homomorphismus $\phi : C \to C'$ vom Grad 1 mit
$$f - g = \phi \circ d + d' \circ \phi.$$
Wir sagen, f und g sind *homotop*, in Zeichen $f \simeq g$, wenn es eine Homotopie von f nach g gibt. Zeigen Sie:

(a) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.
(b) Ist $f \simeq g$, so gilt $f_* = g_* : H_*(C) \to H_*(C')$.
(c) Gibt es Homomorphismen $f : (C, d) \to (C', d')$ und $g : (C', d') \to (C, d)$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_C$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{C'}$, so ist $H_*(C) \cong H_*(C')$.

Aufgabe 58
Sei $m \geq 2$ eine ganze Zahl und $E|\mathbb{Q}$ eine elliptische Kurve mit $E[m] \subseteq E(\mathbb{Q})$.

(a) Sei $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}^{\infty} \subseteq S \subseteq \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$. Finden Sie ein Repräsentantensystem für
$$T_{S,m} = \left\{ a \in \mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^m : v_{\mathfrak{p}}(a) \equiv 0 \bmod m \text{ für alle } \mathfrak{p} \notin S \right\}.$$
(b) Sei nun $m = 2$. Zeigen Sie, dass
$$\dim_{\mathbb{F}_2} E(\mathbb{Q})/2E(\mathbb{Q}) \leq 2|S| + 2,$$
wobei S wie in III.7.11 gewählt ist.
(c) Schließen Sie, dass die elliptische Kurve
$$E : y^2 = x^3 - x$$
höchstens Rang 4 über $\mathbb{Q}$ hat (tatsächlich hat sie Rang 0).

Abgabe: bis Freitag 09.05.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.