



## Übungen zur Vorlesung Arithmetische Geometrie II

### Blatt 4

#### Aufgabe 63

Sei  $M|K$  eine Galois-erweiterung mit Galoisgruppe  $G = \text{Gal}(M|K)$ , sei  $v$  ein ultrametrischer Absolutbetrag auf  $K$  und  $w$  eine Fortsetzung von  $v$  auf  $M$ . Definiere die Zerlegungsgruppe

$$Z_{w|v} = \{\sigma \in G : (\mathcal{O}_w)^\sigma = \mathcal{O}_w\}$$

und die Trägheitsgruppe

$$T_{w|v} = \{\sigma \in G : w(x^\sigma - x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{O}_w\}.$$

von  $w|v$ . Zeigen Sie:

- $T_{w|v}$  und  $Z_{w|v}$  sind abgeschlossene Untergruppen von  $G$ , und  $T_{w|v} \triangleleft Z_{w|v}$ .
- Die Restklassenkörpererweiterung  $\bar{L}_w|\bar{K}_v$  ist normal und wir haben einen natürlichen stetigen Homomorphismus  $Z_{w|v} \rightarrow \text{Aut}(\bar{L}_w|\bar{K}_v)$  mit Kern  $T_{w|v}$ .

#### Aufgabe 64

Zeigen Sie, dass die Einbettung  $E(K)/mE(K) \rightarrow H^1(G_K, E[m])$  aus der Kummersequenz im Fall  $\mu_m \subseteq K$  die von der Kummer-Paarung  $E(K) \times G_K \rightarrow E[m]$  induzierte Abbildung ist.

#### Aufgabe 65

Sei  $L|K$  eine endliche Galois-erweiterung mit  $G = \text{Gal}(L|K) = \langle \sigma \rangle$  zyklisch. Für  $\beta \in L$  mit Norm  $N_{L|K}(\beta) = 1$  definiere  $\xi : G \rightarrow L$  durch  $\xi(\sigma^n) = \prod_{i=1}^n \beta^{\sigma^i}$ .

- Zeigen Sie:  $\xi$  wohldefiniert und  $\xi \in Z^1(G, L^\times)$ .
- Folgern Sie eine weitere Variante von Hilberts Theorem 90: Genau dann ist  $N_{L|K}(\beta) = 1$ , wenn es  $\alpha \in L^\times$  mit  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha^\sigma}$  gibt.

#### Aufgabe 66

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $\text{char}(K) \neq 2, 3$  und sei  $E|K$  eine elliptische Kurve. Es bezeichne  $\text{Aut}(E, O_E)$  die Gruppe der Automorphismen von  $E$  als elliptischer Kurve, also der  $K$ -Isomorphismen  $E \rightarrow E$ , die  $O_E$  fixieren. Zeigen Sie, dass  $|\text{Aut}(E, O_E)| \in \{2, 4, 6\}$ , abhängig von  $j_E$ .

**Abgabe: bis Freitag 23.05.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.**