Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie II

Blatt 8

Aufgabe 78

Sei $E|K$ eine elliptische Kurve. Es bezeichne $\mathcal{N}$ die Menge der endlichen Erweiterungen von K, und $\mathcal{N}(C) = \{L \in \mathcal{N} : C(L) \neq \varnothing\}$ für eine K-Kurve C. Zeigen Sie:

(a) Ist C ein E-Torsor und $L \in \mathcal{N}$, so ist genau dann $L \in \mathcal{N}(C)$, wenn
$$\xi_C \in \operatorname{Ker}\left(H^1(K,E) \xrightarrow{\text{res}} H^1(L,E)\right).$$

(b) Ist K ein Zahlkörper und $m \in \mathbb{N}$ mit $E[m] \subseteq E(K)$ und $\mu_m \subseteq K$, so ist $H^1(K, E[m])$ unendlich.

(c) Zwei E-Torsoren C, C' mit $\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(C')$ müssen nicht isomorph sein.

Aufgabe 79

Sei K ein vollkommener Körper und $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Zeigen Sie:

(a) Ist $E|K$ eine elliptische Kurve, so hat jeder Morphismus $f : E \to E$ vom Grad $\deg(f) > 1$ einen Fixpunkt.

(b) Ist C eine glatte projektive geometrisch irreduzible $\mathbb{F}_q$-Kurve vom Geschlecht $g_C = 1$, so ist $C(\mathbb{F}_q) \neq \varnothing$.

(c) Es ist $\mathrm{WC}(E|\mathbb{F}_q) = 0$ für jede elliptische Kurve $E|\mathbb{F}_q$.

Aufgabe 80

Sei $\operatorname{char}(K) \neq 2, 3$. Für $a, b, c \in K^\times$ betrachten wir die ebene projektive Kurve
$$C : aX^3 + bY^3 + cZ^3 = 0.$$

(a) Zeigen Sie: Die Kurve C ist geometrisch irreduzibel, glatt, und $g_C = 1$.

(b) Bestimmen Sie die elliptische Kurve $E|K$ über der C ein Torsor ist.

Aufgabe 81

Sei $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Gegeben seien die projektiven K-Kurven $C_1 \subseteq \mathbb{P}^2$ durch $C_1 : y^2 = f(x)$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i \in K[X]$ quadratfrei vom Grad 4, sowie $C_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ durch
$$C_2 = \mathcal{V}_+(ZW - X^2, Y^2 - a_4Z^2 - a_3XZ - a_2ZW - a_1XW - a_0W^2).$$
Wir identifizieren $\mathbb{A}^3$ mit $\mathbb{P}^3 \smallsetminus \mathcal{V}_+(W)$. Zeigen Sie:

(a) C_1 ist regulär in jedem $P \in \mathbb{A}^2$, aber nicht in $P_\infty = [0:1:0]$, und C_2 ist glatt.

(b) $C_2 \cap \mathbb{A}^3$ ist isomorph zu $C_1 \cap \mathbb{A}^2$.

(c) Bestimmen Sie $C_2(K) \smallsetminus \mathbb{A}^3$.

Abgabe: bis Freitag 27.06.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.