Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie II

Blatt 9

Aufgabe 82

Sei $E|K$ eine elliptische Kurve und seien C_1, C_2 zwei E-Torsoren. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen E-Torsor C_3 und einen K-Morphismus $\varphi : C_1 \times C_2 \to C_3$ mit
$$\varphi(P_1 + Q_1, P_2 + Q_2) = P_1 + P_2 + \varphi(Q_1, Q_2)$$
für alle $P_1, P_2 \in E$, $Q_1 \in C_1$, $Q_2 \in C_2$.

(b) Dieser E-Torsor C_3 ist durch die Eigenschaft in (a) bis auf Isomorphie bestimmt.

(c) In $H^1(K, E)$ gilt $\xi_{C_1} + \xi_{C_2} = \xi_{C_3}$.

Aufgabe 83

Wir betrachten die elliptische Kurve
$$E : y^2 = x^3 + x$$
über $\mathbb{R}$. Es bezeichne τ die komplexe Konjugation sowie
$$X = \{P \in E(\mathbb{C}) : P^\tau = -P\}.$$
Zeigen Sie:

(a) $Z^1(\mathbb{R}, E) = \{\xi : G_{\mathbb{R}} \to E \mid \xi(\mathrm{id}) = P_\infty, \xi(\tau) \in X\}$

(b) $X = \{(x, y) \in E(\mathbb{C}) : x \in \mathbb{R}, x \leq 0\} \cup P_\infty = \{P^\tau - P : P \in X\}$

(c) $\mathrm{WC}(E|\mathbb{R}) = 0$

Aufgabe 84

Sei $p > 2$ prim und $a, d \in \mathbb{F}_p^\times$. Wir betrachten die affine $\mathbb{F}_p$-Kurve
$$C_1 : x^2 - y^2 = a,$$
die affine $\mathbb{F}_p$-Kurve
$$C_2 : y^2 = x^4 - 4d$$
und die elliptische Kurve
$$E : y^2 = x^3 + dx.$$
Zeigen Sie:

(a) $|C_1(\mathbb{F}_p)| = |\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)| - 2$

(b) Durch $(x, y) \mapsto (\frac{1}{2}(x^2 + y), \frac{1}{2}x(x^2 + y))$ wird ein birationaler Morphismus $C_2 \to E$ gegeben. Bestimmen Sie die inverse rationale Abbildung.

(c) $|E(\mathbb{F}_p)| = |C_2(\mathbb{F}_p)| + 2$

(d) Ist $p \equiv 3 \bmod 4$, so ist $|C_2(\mathbb{F}_p)| = |C_1(\mathbb{F}_p)|$, und somit $|E(\mathbb{F}_p)| = p + 1$.

Abgabe: bis Freitag 04.07.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.