Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie II

Blatt 10

Aufgabe 85
Sei E die elliptische Kurve
$$E : y^2 = x^3 - x$$
über $\mathbb{R}$. Wir wissen, dass $\mathrm{WC}(E|\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(a) Geben Sie Gleichungen für den (bis auf Isomorphie eindeutigen) nichttrivialen E-Torsor C an.
(b) Überlegen Sie sich, wie Sie die Wirkung von E auf C bestimmen können und geben Sie den zu $P = (0, 0) \in E$ gehörigen Automorphismus von C explizit an.

Aufgabe 86
Sei E eine elliptische Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Erinnern Sie sich an die Einbettung $E \to \mathrm{Aut}(K(E)|K)$, $P \mapsto \tau_P^*$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\phi : E \to E'$ eine separable Isogenie, so sind E' und ϕ durch die Untergruppe $\Gamma := \mathrm{Ker}(\phi) \leq E$ bis auf Isomorphie bestimmt.
(b) Zu jeder endlichen Untergruppe $\Gamma \leq E$ gibt es eine elliptische Kurve $E'|K$ und eine separable Isogenie $\phi : E \to E'$ mit $\mathrm{Ker}(\phi) = \Gamma$.

Aufgabe 87
Führen Sie die Details im Beweis von Lemma IV.10.17 aus.

Abgabe: bis Freitag 11.07.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.