Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie II

Blatt 11

Aufgabe 88

Sei E die elliptische Kurve

$$E : y^2 = x^3 - 6x^2 + 17x$$

über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Struktur von $E(\mathbb{Q})$.

Aufgabe 89

Sei K ein Körper und $E|K$ eine elliptische Kurve. Zeigen Sie:

(a) Ist K ein lokaler Körper, so ist $\mathrm{rang}(E|K) = \infty$.

(b) Ist K algebraisch über einem endlichen Körper, so ist $\mathrm{rang}(E|K) = 0$.

Aufgabe 90

Sei K ein Zahlkörper, V eine irreduzible K-Varietät und $F = K(V)$. Sei weiter C eine glatte projektive geometrisch irreduzible F-Kurve und $E|F$ eine elliptische Kurve.

(a) Ist $g_C = 0$, so ist C schwach $F|K$-isotrivial.

(b) Ist $g_C = 1$ und C schwach $F|K$-isotrivial, und existiert ein nichtkonstanter Morphismus $C \to E$, so ist auch E schwach $F|K$-isotrivial.

(c) Ist $V = \mathbb{A}^n$ und ist E $F|K$-isotrivial, so ist $E(F)$ endlich erzeugt.

Aufgabe 91

Ein Körper K ist *pseudo-algebraisch abgeschlossen* (PAC), wenn $C(K) \neq \varnothing$ für jede geometrisch irreduzible K-Kurve C. Er ist *large*, wenn $|C(K)| = \infty$ für jede geometrisch irreduzible ebene K-Kurve C mit $C_{\mathrm{reg}}(K) \neq \varnothing$. Zeigen Sie:

(a) Jeder PAC-Körper ist large.

(b) Die lokalen Körper $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}_p$ sind large. Sind sie auch PAC?

(c) Ist K PAC und $E|K$ eine elliptische Kurve, so ist $E(K)/2E(K) \cong H^1(K, E[2])$.

Abgabe: bis Freitag 18.07.2014, 14 Uhr, in den Briefkasten auf F4.