Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 10

Aufgabe 34

Zu einer affinen K-Varietät V und einem Punkt $P \in V(K)$ sei $\mathrm{Der}_P(V, K)$ der Vektorraum der *P-Derivationen*, d.h. derjenigen $\partial \in \mathrm{Hom}_K(K[V], K)$ für die gilt:

$$\partial(fg) = g(P)\partial f + f(P)\partial g$$

Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n$ und $W \subseteq \mathbb{A}^m$ affine K-Varietäten und $P \in V(K)$.

(a) Geben Sie explizite Abbildungsvorschrifen für die natürlichen Isomorphismen (inklusive ihrer Inversen) zwischen den K-Vektorräumen $T_P(V)$, $\mathrm{Der}_P(V, K)$ und $(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*$.

(b) Sei $f : V \to W$ ein Morphismus gegeben durch $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie, dass die Ableitung $df : T_P(V) \to T_{f(P)}(W)$ von f in P gegeben ist durch $df(a) = J_P(\mathbf{f})(a)$.

Aufgabe 35

Sei C eine glatte projektive geometrisch irreduzible K-Kurve und $P \in C(K)$. Zeigen Sie: Es gibt ein $f \in K(C)$ mit P als einziger Nullstelle.

Aufgabe 36

Sei $\varphi : C_1 \to C_2$ ein nichtkonstanter Morphismus glatter projektiver geometrisch irreduzibler K-Kurven. Zeigen Sie:

(a) $g_{C_2} \leq g_{C_1}$.

(b) Ist C_1 isomorph zu $\mathbb{P}^1$, so auch C_2. (*Satz von Lüroth*)

Aufgabe 37

Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Gleichung

$$E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

definiert eine glatte ebene Kubik $E_\lambda \subseteq \mathbb{P}^2$.

(b) Ist $K = \overline{K}$, so ist umgekehrt jede glatte ebene Kubik zu einem E_λ isomorph.

Abgabe: bis Dienstag 21.01.2014, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.