



**Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I**

Blatt 12

Aufgabe 42

Sei $K = \overline{K}$. Für $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ sei E_λ die elliptische Kurve aus Aufgabe 37. Zeigen Sie, dass

$$j_{E_\lambda} = 256 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$$

und dass die Isomorphieklassen unter den E_λ bis auf zwei Ausnahmen aus genau 6 elliptischen Kurven bestehen.

Aufgabe 43

Sei $a \in K^\times$. Sei C die ebene Kubik $C : x^3 + y^3 = a$ und $O = [1 : -1 : 0]$. Zeigen Sie:

- (a) (C, O) ist eine elliptische Kurve.
- (b) Genau dann liegen drei Punkte $P, Q, R \in C$ auf einer Gerade, wenn $P+Q+R = O$.
- (c) $j_C = 0$

Aufgabe 44

Sei $E|\mathbb{Q}$ eine elliptische Kurve.

- (a) Zeigen Sie, dass $E[2] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ und $\deg([2]) = 4$.
- (b) Konstruieren Sie für $i = 0, 1, 2$ jeweils eine elliptische Kurve $E_i|\mathbb{Q}$ mit $E_i(\mathbb{Q})[2] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^i$.

Aufgabe 45

Zeigen Sie, dass die elliptische Kurve $E : y^2 = x^3 - x$ über $\overline{\mathbb{Q}}$ komplexe Multiplikation besitzt.

Abgabe: bis Dienstag 04.02.2014, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.