Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 3

Aufgabe 8

Sei v ein ultrametrischer Absolutbetrag auf einem Körper F.

(a) Zeigen Sie: Durch $|f|_w = \max_i |a_i|_v$ für $f = \sum_i a_i t^i \in F[t]$ wird ein Absolutbetrag w auf dem rationalen Funktionenkörper $F(t)$ definiert, der v fortsetzt (die *Gaußfortsetzung*).

(b) Beweisen Sie den *Satz von Chevalley*: Ist $E|F$ eine Körpererweiterung, so lässt sich v zu einem Absolutbetrag auf E fortsetzen.

(c) Gilt (b) auch ohne die Voraussetzung, dass v ultrametrisch ist?

Aufgabe 9

Sei $\mathbb{Q}_p$ der Körper der p-adischen Zahlen, und $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p. Zeigen Sie:

(a) Die *Einseinheiten* $U_1 = 1 + p\mathbb{Z}_p$ bilden eine Untergruppe von $\mathbb{Q}_p^\times$.

(b) Es ist $U_1 \subseteq (\mathbb{Q}_p^\times)^n$.

(c) Der Quotient $\mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^n$ ist endlich.

(d) *Gelten (b) und (c) auch ohne die Voraussetzung der Teilerfremdheit?

Aufgabe 10

Sei K ein Körper, und $F = K(t)$ der rationale Funktionenkörper. Für $f \in K[t]$ normiert irreduzibel sei v_f die zugehörige normierte diskrete Bewertung und $|x|_{v_f} = e^{-v_f(x)\deg(f)}$. Sei $\mathcal{S}_F^0$ die Menge all dieser v_f, und sei $\mathcal{S}_F = \mathcal{S}_F^0 \cup \{v_\infty\}$ (aus (a)), und $|x|_{v_\infty} = e^{-v_\infty(x)}$. Zeigen Sie:

(a) Durch $v_\infty(f) = -\deg(f)$ für $f \in K[t]$ wird eine diskrete Bewertung v_∞ auf F definiert.

(b) Jeder nichttriviale Absolutbetrag auf F, der eingeschränkt auf K trivial ist, ist abhängig von einem $v \in \mathcal{S}_F$.

(c) Für $x \in F^\times$ ist $|x|_v = 1$ für fast alle $v \in \mathcal{S}_F$, und $\prod_{v\in\mathcal{S}_F} |x|_v = 1$.

Abgabe: bis Dienstag 19.11.2013, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.