Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung Arithmetische Geometrie I

Blatt 4

Aufgabe 11

Sei R ein Ring. Wir definieren, analog zu Aufgabe 4, $R[[t]] = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k : a_k \in R\right\}$ mit koeffizientenweiser Addition und Faltung als Multiplikation.

(a) Zeigen Sie: $R[[t]]$ ist ein Ring, und ist R ein Integritätsbereich, so auch $R[[t]]$.
(b) Zeigen Sie, dass durch $\sum_k a_k t^k \mapsto \sum_k a_k p^k$ ein Isomorphismus $\mathbb{Z}[[t]]/(t-p) \cong \mathbb{Z}_p$ induziert wird.
(c) *Ist $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}_p[[t]]) = \mathbb{Q}_p((t))$?

Aufgabe 12

Zeigen Sie:

(a) Für $x_1, \ldots, x_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ ist $H(\prod_{i=1}^n x_i) \le \prod_{i=1}^n H(x_i)$.
(b) Für $x_1, \ldots, x_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ ist $H(\sum_{i=1}^n x_i) \le n \prod_{i=1}^n H(x_i)$.
(c) Ist $S_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{mn+m+n}$, $([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) \mapsto [\ldots : x_i y_j : \ldots]$ die Segre-Einbettung (vgl. B5.III.7.1), und $P \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$, $Q \in \mathbb{P}^m(\overline{\mathbb{Q}})$, so ist $H(S_{n,m}(P,Q)) = H(P)H(Q)$.

Aufgabe 13

Seien K ein Körper und $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine irreduzible projektive K-Varietät mit Funktionenkörper $K(V)$. Eine K-rationale Abbildung $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ sei definiert als $K(V)^\times$-Äquivalenzklasse $\varphi = [\varphi_0 : \ldots : \varphi_m]$ mit $\varphi_0, \ldots, \varphi_m \in K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Sind $f_0, \ldots, f_m \in K[X_0, \ldots, X_n]_d$ homogen vom Grad d, und $f_i \notin \mathcal{I}_+(V)$ für ein i, so gibt es genau eine K-rationale Abbildung $[\mathbf{f}]$: $V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$, welche die Abbildung $P \mapsto [f_0(P) : \ldots : f_m(P)]$ auf einer offenen dichten Teilmenge von V induziert.
(b) Jede K-rationale Abbildung $V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ ist von dieser Form.
(c) Sind $f_0, \ldots, f_m \in K[\mathbf{X}]_d$ und $g_0, \ldots, g_m \in K[\mathbf{X}]_e$, so ist $[\mathbf{f}] = [\mathbf{g}]$ genau dann, wenn $f_i g_j - f_j g_i \in \mathcal{I}_+(V)$ für alle i, j.
(d) Genau dann ist die rationale Abbildung $[\mathbf{f}]$ in $P \in V$ regulär, wenn es $g_0, \ldots, g_m$ wie in (c) gibt mit $g_i(P) \ne 0$ für ein i.
(e) Die K-Morphismen $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ sind die Abbildungen $P \mapsto [f_0(P) : \ldots : f_m(P)]$ mit $f_0, \ldots, f_m \in K[\mathbf{X}]$ homogen vom selben Grad und ohne gemeinsame Nullstelle.

Abgabe: bis Dienstag 26.11.2013, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.