Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 6

Aufgabe 18
Für $p > 2$ prim sei $V_p \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ die Varietät gegeben durch $X^2 + Y^2 = pZ^2$. Zeigen Sie:
(a) Über $\overline{\mathbb{Q}}$ ist jedes V_p isomorph zu $\mathbb{P}^1$, also $(V_p)_{\overline{\mathbb{Q}}} \cong \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$.
(b) Genau dann ist V_p isomorph zu $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$, wenn $V_p(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$.
(c) Genau dann ist $V_p(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$, wenn $p \not\equiv 1 \bmod 4$. *Hinweis: Wiederholen Sie, was Sie über die Arithmetik von $\mathbb{Z}[i]$ wissen.*

Aufgabe 19
Sei R ein Ring. Das *Jacobson-Radikal* $J(R)$ von R ist der Schnitt aller maximalen Ideale von R.
(a) Sei $x \in R$. Zeigen Sie: $x \in J(R) \Leftrightarrow 1 - xy \in R^\times$ für alle $y \in R$
(b) Beweisen Sie die folgende Fassung des *Lemmas von Nakayama*: Sei M ein endlich erzeugter R-Modul und $\mathfrak{a} \subseteq J(R)$ ein Ideal von R. Ist $M = \mathfrak{a}M$, so ist $M = 0$.

Aufgabe 20
Bestimmen Sie für jede der folgenden $\mathbb{Q}$-Varietäten V_i die Singularitäten und die zugehörigen Tangentialräume, und skizzieren Sie $V_i(\mathbb{R})$.
(a) $V_1 = \mathcal{V}(X^2 - X^4 - Y^4) \subseteq \mathbb{A}^2$
(b) $V_2 = \mathcal{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$
(c) $V_3 = \mathcal{V}(X^3Z + X^2Z - Y^2Z) \subseteq \mathbb{A}^3$
(d) $V_4 = \mathcal{V}(X^3 + X^2 - Y^2, Z - X) \subseteq \mathbb{A}^3$

Abgabe: bis Dienstag 10.12.2013, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.