Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 7

Aufgabe 21

Beweisen Sie die folgenden Kriterien für Glattheit von ebenen Kurven:

(a) Sei $f \in K[X_1, X_2]$ und $C = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^2$. Wenn es für jedes $P \in C$ ein $i = 1, 2$ gibt mit $\frac{\partial f}{\partial X_i}(P) \neq 0$, dann ist C glatt.

(b) Sei $f \in K[X_0, X_1, X_2]$ und $C = \mathcal{V}_+(f) \subseteq \mathbb{P}^2$. Wenn es für jedes $P \in C$ ein $i = 0, 1, 2$ gibt mit $\frac{\partial f}{\partial X_i}(P) \neq 0$, dann ist C glatt.

Aus dem *Satz von Bézout* (Kapitel II §8) folgt, dass zwei ebene projektive Kurven stets mindestens einen Schnittpunkt haben. Zeigen Sie:

(c) Ist eine projektive ebene K-Kurve $C \subseteq \mathbb{P}^2$ glatt, so ist C geometrisch irreduzibel.

Aufgabe 22

Sei $C = \{(t^3, t^4, t^5) : t \in \overline{K}\} \subseteq \mathbb{A}^3$.

(a) Zeigen Sie: C ist eine geometrisch irreduzible K-Kurve.

(b) Bestimmen Sie die Singularitäten von C und die zugehörigen Tangentialräume.

(c) Zeigen Sie: C ist nicht isomorph zu einer ebenen affinen K-Kurve $C_0 \subseteq \mathbb{A}^2$.

Aufgabe 23

Sei $G \subseteq \mathbb{P}^n$ eine algebraische Gruppe, also eine quasiprojektive K-Varietät zusammen mit $e \in G(K)$ und K-Morphismen $\cdot : G \times G \to G$ und $i : G \to G$, die $(G, \cdot, e)$ zu einer Gruppe mit Inversem i machen. Zeigen Sie, dass G glatt ist.

Aufgabe 24

Zeigen Sie, dass die ebene projektive $\mathbb{Q}$-Kurve $C : 3X^3 + 4Y^3 + 5Z^3 = 0$ glatt ist und über jeder Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ einen rationalen Punkt hat. *Wir werden im Sommer sehen, dass $C(\mathbb{Q}) = \varnothing$. Diese Kurve (die sogenannte Selmer-Kurve) ist somit ein Beispiel, das zeigt, dass das Lokal-Global-Prinzip für Quadriken für Kubiken nicht gilt.*

Abgabe: bis Dienstag 17.12.2013, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.