Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 8

Aufgabe 25
Sei $f : C_1 \to C_2$ ein Morphismus glatter projektiver geometrisch irreduzibler K-Kurven. Zeigen Sie: Genau dann ist f in $P \in C_1(K)$ unverzweigt, wenn die induzierte Abbildung $df : T_P(C_1) \to T_{f(P)}(C_2)$ ein K-Vektorraumisomorphismus ist.

Aufgabe 26
Zeigen Sie, dass die folgenden projektiven Kurven C_i glatt sind und bestimmen Sie für die Morphismen $f_i : C_i \to \mathbb{P}^1$ jeweils den Grad, die Verzweigungspunkte und die zugehörigen Verzweigungsindices:

(a) $C_1 = \mathbb{P}^1$, $f_1 = [X^2 : Z^2]$
(b) $C_2 : X^4 + Y^4 = Z^4$, $f_2 = [X : Z]$
(c) $C_3 : Y^2Z = X^3 - 3XZ^2$, $f_3 = [X : Z]$
(d) $C_4 : Y^2Z = X^3 - 3XZ^2$, $f_4 = [Y : Z]$

Aufgabe 27
Sei C eine glatte projektive geometrisch irreduzible K-Kurve und $D, D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(C)$ Divisoren. Zeigen Sie:

(a) Ist $\deg(D) < 0$, so ist $\dim(D) = 0$.
(b) Ist $\deg(D) = 0$, so ist $\dim(D) = 1$ falls D ein Hauptdivisor ist, sonst $\dim(D) = 0$.
(c) Ist $D_1 \sim D_2$, so ist $\deg(D_1) = \deg(D_2)$ und $\dim(D_1) = \dim(D_2)$.

Aufgabe 28
Sei C eine glatte projektive geometrisch irreduzible $\overline{K}$-Kurve. Zeigen Sie: Genau dann ist $C \cong \mathbb{P}^1$, wenn es ein $D \in \mathrm{Div}(C)$ mit $\deg(D) = 1$ und $\dim(D) > 1$ gibt.

Aufgabe 29
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Abgabe: bis Dienstag 07.01.2014, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.