Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Christoph Hanselka
WS 2013/14

Übungen zur Vorlesung
Arithmetische Geometrie I

Blatt 9

Aufgabe 30
Sei $\varphi : C_1 \to C_2$ ein Morphismus glatter projektiver geometrisch irreduzibler K-Kurven und $\varphi_* : \mathrm{Div}C_1 \to \mathrm{Div}C_2$ der induzierte Homomorphismus auf den Gruppen der Divisoren (vgl. II.5.6). Zeigen Sie: Für $f \in K(C_1)^\times$ ist $\varphi_*((f)_{C_1}) = (N_{K(C_1)|K(C_2)}(f))_{C_2}$.

Aufgabe 31
Sei K ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$ und $L|K$ eine endliche Erweiterung. Sei zudem $D \in \mathrm{Der}(K, K)$ eine Derivation auf K.

(a) Ist $L = K(\alpha)$ mit $\alpha^p = a \in K$, so setzt sich D genau dann zu einer Derivation $D' \in \mathrm{Der}(L, L)$ fort, wenn $D(a) = 0$.
(b) Genau dann ist $L|K$ separabel, wenn $\mathrm{Der}_K(L, L) = 0$.

Aufgabe 32
Sei C ein glatte projektive geometrisch irreduzible K-Kurve. Zeigen Sie: Genau dann ist $C \cong \mathbb{P}^1_K$, wenn $g_C = 0$ und es $D \in \mathrm{Div}_K C$ mit $\mathrm{deg}D = 1$ gibt. Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Bedingung $g_C = 0$ allein nicht ausreichend ist.

Aufgabe 33
Zeigen Sie: Für $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$ ist $\frac{1}{4}H(a)H(b) \leq H([1 : a + b : ab]) \leq 2H(a)H(b)$.

Abgabe: bis Dienstag 14.01.2014, 10 Uhr, in den Briefkasten auf F4.