Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Übungsblatt 2 zur Linearen Algebra II

Definition. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $x = a + bi \in \mathbb{C}$ bezeichne $\overline{x} := a - bi$ die zu x *komplex konjugierte* Zahl. Wir setzen die komplexe Konjugation komponentenweise auf Vektoren und Matrizen fort, d.h. etwa für $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ sei $\overline{x} := (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})^t$. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ heißt

- *symmetrisch*, falls $A^t = A$.
- *hermitesch*, falls $A^t = \overline{A}$.

Beachte: Ist zusätzlich $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, so ist A offenbar genau dann hermitesch, wenn A symmetrisch ist.

Aufgabe 3. Zeige:

(a) Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto \overline{x}$ ist ein selbstinverser Körperautomorphismus.

(b) Für $\ell, m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}_{\ell \times m}(\mathbb{C})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$ ist $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ hermitesch. Zeige, dass jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A reell ist, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachte $\overline{x}^t A x$, transponiere und konjugiere.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$. Zeige, dass das charakteristische Polynom $\chi_B(t)$ der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

durch

$$f(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_0.$$

gegeben ist. B wird die *Begleitmatrix* des Polynoms f genannt.

Aufgabe 6. Bestimme das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

Abgabe bis Donnerstag, den 23. April, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.