Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Übungsblatt 3 zur Linearen Algebra II

Definition. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Eine *Fahne* von V ist eine Folge von Untervektorräumen

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

mit $\dim_K V_i = i$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Aufgabe 7. Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeige, dass f genau dann trigonalisierbar ist, wenn V eine Fahne aus f-invarianten Untervektorräumen besitzt.

Aufgabe 8. Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeige, dass genau dann $\chi_A(t) = t^n$ gilt, wenn A ähnlich zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 9. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in K$ und $P \in K[t]$. Zeige:

(a) Ist λ ein Eigenwert von f, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(f)$.

(b) $\chi_f(t) = \chi_{f-\lambda\,\mathrm{id}_V}(t-\lambda)$.

Aufgabe 10. Bestimme für die folgenden Matrizen jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom und entscheide, ob sie trigonalisierbar sind und ob sie diagonalisierbar sind. Gib gegebenenfalls eine Trigonalsierung bzw. Diagonalisierung an.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}), \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}), \ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_2), \ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_3)$$

Zusatzaufgabe 11. Für $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine linear rekursiv definierte Folge, gegeben durch

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{k-n+i} \quad (k \geq n).$$

(a) Gib eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ derart an, dass

$$\begin{pmatrix} a_{k-n+2} \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_{k-n+1} \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

(b) Sei nun $n = 2$, $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 1$. Gib für $k \in \mathbb{N}$ eine explizite Formel für a_k an.

Hinweis: Verwende Aufgabe 10.

Abgabe bis Donnerstag, den 30. April, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.