Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Übungsblatt 4 zur Linearen Algebra II

Im Folgenden sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

Aufgabe 12. Seien $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $U, W \subseteq V$ f-invariante Untervektorräume mit $V = U \oplus W$. Zeige:

(a) $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(f|_U) \oplus \mathrm{Ker}(f|_W)$.

(b) Ist f diagonalisierbar, so sind auch die Einschränkungen $f|_U \in \mathrm{End}_K(U)$ und $f|_W \in \mathrm{End}_K(W)$ diagonalisierbar.

Aufgabe 13. Seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ diagonalisierbar. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 12, dass f und g genau dann kommutieren, wenn sie *simultan diagonalisierbar* sind, d.h. wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V derart gibt, dass $M_{\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}}(g)$ Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 14. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeige:

(a) $K[A] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i \mid c_i \in K \right\}$

(b) Falls $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, so ist $A^{-1} \in K[A]$.

Aufgabe 15. Seien $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ & 0 & a_2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme das Minimalpolynom von A,

(a) falls alle a_i von Null verschieden sind.

(b) ohne zusätzliche Bedingung an die a_i.

Zusatzaufgabe 16. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, $\chi_A \in K[t]$ das charakteristische Polynom und $P_A \in K[t]$ das Minimalpolynom von A. Zeige:

(a) χ_A und P_A haben die selben Nullstellen in jedem Körper L, der K als Teilkörper enthält.

(b) $\chi_A | (P_A)^n$ im Ring $K[t]$.

Hinweis: Du darfst dabei verwenden, dass K Teilkörper eines Körpers ist, über welchem χ_A in Linearfaktoren zerfällt.

Abgabe bis Donnerstag, den 7. Mai, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.