Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Lösung zu Übungsblatt 4 zur Linearen Algebra II

Im Folgenden sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

Aufgabe 15. Seien $a_1, \dots, a_{n-1} \in K$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ & 0 & a_2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme das Minimalpolynom von A,

(a) falls alle a_i von Null verschieden sind.

(b) ohne zusätzliche Bedingung an die a_i.

Lösungsvorschlag: (a) Seien alle a_i von Null verschieden. Wir behaupten, dass t^n das Minimalpolynom von A ist. Es ist $Ae_i = a_{i-1}e_{i-1}$ für alle $i \in \{2, \dots, n\}$. Damit folgt induktiv sofort, dass

$$A^{n-1}e_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) e_1 \neq 0$$

also $A^{n-1} \neq 0$. Da aber zusätzlich $Ae_1 = 0$, sieht man $A^n = 0$ (oder man verwendet dafür den Satz von Cayley-Hamilton). Die Behauptung folgt somit unmittelbar.

(b) A hat Blockdiagonalgestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

Wobei jeder der Blöcke A_i von der Form wie in (a) ist. Das bedeutet, für n_i jeweils die Größe des Blockes A_i und $k_i := \sum_{j<i} n_j$ ist

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_{k_i+1} & & & \\ & 0 & a_{k_i+2} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{k_i+n_i-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $a_{k_i}, \dots, a_{k_i+n_i-1}$ von Null verschieden sind. (Beachte, Blöcke der Größe 1 sind die Nullmatrix.) Ein solcher Block entspricht also gerade einem maximalen Abschnitt aufeinanderfolgender von Null verschiedener Einträge.

Es ist A^k genau dann Null ist, wenn A_i^k für jedes i Null ist. Dies ist wiederum nach (a) genau dann der Fall ist, wenn $k \geq n_i$ für jedes i. Also ist t^k für $k = \max_i n_i$ das Minimalpolynom von A. Dabei ist also k die Größe des größten Blockes, bzw die maximale Länge aufeinanderfolgender von Null verschiedener Einträge.