Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Lösung zu Übungsblatt 5 zur Linearen Algebra II

Zusatzaufgabe 21.

(a) Sei $P \in \mathbb{R}[t]$ normiert. Zeige unter Verwendung des Fundamentalsatzes der Algebra, dass es lineare Polynome $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{R}[t]$ und quadratische Polynome $Q_1, \ldots, Q_\ell \in \mathbb{R}[t]$ gibt, wobei letztere keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ haben, mit $P = \prod_{i=1}^k P_i \prod_{j=1}^\ell Q_j$.

Hinweis: Ist λ eine Nullstelle von P, so auch $\overline{\lambda}$.

(b) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $0 < \dim V < \infty$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Zeige, dass es einen f-invarianten Untervektorraum von V der Dimension 1 oder 2 gibt.

Hinweis: Ist $\chi_f(t) = \prod_j Q_j$ so gilt $Q_1(f) \circ \cdots \circ Q_\ell(f) = 0$. Finde $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $v \in V \setminus \{0\}$ mit $Q_j(f)v = 0$ und betrachete $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{ f^i v \mid i \in \mathbb{N}_0 \}$.

(c) Zeige analog zum Beweis von Satz 4.6, dass jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ähnlich zu einer oberen Blockdreiecksmatrix mit Blockgröße höchstens 2 ist, d.h. einer Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} B_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{pmatrix}$$

mit $B_i \in \mathrm{Mat}_1(\mathbb{R})$ oder $B_i \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ für $i = 1, \ldots, r$.

Lösungsvorschlag: (a) Durch iteriertes Abspalten von Linearfaktoren erhalten wir eine Zerlegung $P = \left(\prod_{i=1}^k P_i\right) Q$ wobei $P_i \in \mathbb{R}[t]$ linear und $Q \in \mathbb{R}[t]$ ohne reelle Nullstellen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es eine komplexe Nullstelle $\lambda = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ von Q. Dann ist auch $0 = \overline{f(\lambda)} = f(\overline{\lambda})$, wobei letztere Gleichheit gilt, da die Koeffizienten von f reell sind. Da $\lambda \neq \overline{\lambda}$, wird also Q von $Q_\ell := (t - \lambda)(t - \overline{\lambda}) = t^2 - (\lambda + \overline{\lambda})t + \lambda\overline{\lambda} \in \mathbb{R}[t]$ geteilt. Wir bekommen also $Q = \widetilde{Q} Q_\ell$ für ein $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}[t]$ ohne Nullstelle. Per Induktion über den Grad von Q erhalten wir so die gewünschte Darstellung.

(b) Hat f einen Eigenvektor, so ist der davon aufgespannte Untervektorraum 1-dimensional und f-invariant. Also können wir annehmen, dass f keinen Eigenvektor besitzt. Sei $P := \chi_f(t)$ und dazu eine Darstellung wie in (a) gegeben. Da P nach Annahme keine Nullstelle besitzt ist also $k = 0$ und damit $P = \prod_{i=1}^\ell Q_i$ mit $\ell > 0$, da $\dim V > 0$.

Sei $w \in V \setminus \{0\}$. Nach Cayley-Hamilton ist

$$0 = Q(f)w = Q_1(f) \circ \cdots \circ Q_\ell(f)w.$$

Sei $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ maximal mit

$$0 = Q_j(f) \circ \cdots \circ Q_\ell(f)w.$$

Dann ist also

$$v := Q_{j+1}(f) \circ \cdots \circ Q_\ell(f)w \neq 0.$$

und $Q_j(f)v = 0$. Dann ist $U := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{v, fv\}$ f-invariant: Sei nämlich $Q_j = at^2 + bt + c$ mit $a \neq 0$. Dann ist

$$f^2 v = -\frac{b}{a} fv - \frac{c}{a} v \in U$$

U ist somit wie gewünscht ein 2-dimensionaler f-invarianter Untervektorraum. (Er ist nicht eindimensional, da v kein Eigenvektor ist.)

(c) Dies folgt wie üblich aus dem Obigen per Induktion über $n := \dim V$. Im Fall $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n > 0$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Dann gibt es nach (b) einen ein- oder zweidimensionalen f_A-invarianten Untervektorraum U von $\mathbb{R}^n$. Wir wählen eine Basis von U und ergänzen sie zu einer von $\mathbb{R}^n$. Die darstellende Matrix von f_A bezüglich dieser hat Blockdiagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

mit $B_1 \in \mathrm{Mat}_1(\mathbb{R})$ oder $B_1 \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ wie gewünscht. Der Rest folgt nach Indukitons-vorraussetzung angewand auf A_1.