

Zusatzaufgabe 36. (Spektralsatz ohne Fundamentalsatz) Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Zeige ohne Verwendung des Fundamentalsatzes der Algebra (und damit insbesondere ohne Verweis auf 6.3-6.5), dass A einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt. Gehe dabei z.B. wie folgt vor:

(a) Zeige², dass es $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$ derart gibt, dass

$$\lambda := \sup_{\|v\|=1} \langle v, Av \rangle = \langle x, Ax \rangle.$$

(b) Es gibt $y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \perp y$ und $Ax = \lambda x + y$.

(c) Für $t \in \mathbb{R}$ sei $x_t := x + ty$. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$t \mapsto \frac{\langle x_t, Ax_t \rangle}{\|x_t\|^2}$$

hat bei $t = 0$ ein Maximum und damit $f'(0) = 0$.

(d) x ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

Abgabe bis Mittwoch, den 3. Juni, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.

²etwa über Kompaktheit oder mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstrass