Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Übungsblatt 11 zur Linearen Algebra II

Zu einem Körper K und K-Vektorräumen V und W bezeichne $\mathrm{Bil}_K(V,W;K)$ den Vektorraum der K-bilinearen Abbildungen $V \times W \to K$.

Aufgabe 47. Seien K ein Körper und V und W endlichdimensionale K-Vektorräume, $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, sowie $\xi \in \mathrm{Bil}_K(V,W;K)$. Wir setzen

$$\xi_\ell \colon V \to W^*, v \mapsto \xi(v,\cdot)$$

und

$$\xi_r \colon W \to V^*, w \mapsto \xi(\cdot,w)$$

Zeige:

(a) Ist f injektiv, so ist f^* surjektiv. Ist f surjektiv, so ist f^* injektiv.

(b) ξ_ℓ und ξ_r sind dual zueinander, d.h.[1] $\xi_\ell^* = \xi_r$ und $\xi_r^* = \xi_\ell$.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) $\{ v \in V \mid \forall w \in W \colon \xi(v,w) = 0 \} = \{0\} = \{ w \in W \mid \forall v \in V \colon \xi(v,w) = 0 \}$

  (ii) ξ_ℓ ist ein Isomorphismus.

  (iii) ξ_r ist ein Isomorphismus.

  In diesem Fall wird ξ eine *perfekte Paarung* genannt.

Aufgabe 48. Sei K ein Körper, V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit einer perfekten Paarung $\xi \colon V \times W \to K$, sowie $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $g \in \mathrm{End}_K(W)$. Zeige:

(a) Genau dann ist

$$\xi(f(v),w) = \xi(v,g(w))$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$, wenn folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\xi_\ell"] \arrow[d, "f"] & W^* \arrow[d, "g^*"] \\ V \arrow[r, "\xi_\ell"] & W^* \end{tikzcd}$$

[1]Genauer meinen wir $\xi_\ell^* \circ \iota_W = \xi_r$ und $\xi_r^* \circ \iota_V = \xi_\ell$, wobei $\iota_V \colon V \to V^{**}$ und $\iota_W \colon W \to W^{**}$ die kanonischen Isomorphismen sind.

(b) Es gibt genau ein $g' \in \mathrm{End}_K(V)$ mit

$$\xi(g'(v), w) = \xi(v, g(w))$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$.

Aufgabe 49. Sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ selbstadjungiert. Zeige, dass f und g genau dann kommutieren, wenn sie *simultan orthogonal diagonalisierbar sind*[2], d.h. wenn es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V gibt, deren Elemente sowohl Eigenvektoren von f als auch von g sind.

Aufgabe 50. Sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

(a) Zeige, dass es eindeutig bestimmte selbstadjungierte $f_R, f_I \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $f = f_R + i f_I$ gibt.

(b) Zeige, dass f genau dann normal ist, wenn f_R und f_I kommutieren.

(c) Gib unter Verwendung von Aufgabe 49 einen alternativen Beweis des Spektralsatzes, Theorem VII 5.6. für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Zusatzaufgabe 51. Sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeige, dass f genau dann normal ist, wenn $f^{\mathrm{adj}} \in \mathbb{C}[f]$.

Abgabe bis Donnerstag, den 25. Juni, um 15:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.

[2] Vergleiche Aufgabe 13