Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Arno Fehm
Christoph Hanselka

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 12 zur Linearen Algebra II

Im folgenden seien K ein Körper und V, W K-Vektorräume.

Aufgabe 54. (Basisfreie Konstruktion des Tensorproduktes) Zeige, dass das in Bemerkung VII 6.16 definierte Paar (T, τ) ein Tensorprodukt von V und W ist.

Hinweis: Definiere Homomorphismen zunächst auf T_1 und wende dann den Homomorphiesatz auf T_1/T_0 an.

Lösungsvorschlag: Wie in der Vorlesung definieren wir den K-Vektorraum T_1 mit Basis $V \times W$ und T_0 den Untervektorraum von T_1 erzeugt von den Elementen der Form

$$\delta_{(v+v',w)} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v',w)},\ \delta_{(v,w+w')} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v,w')},\ \delta_{(\lambda v,w)} - \lambda\delta_{(v,w)},\ \delta_{v,\lambda w} - \lambda\delta_{(v,w)}$$

für $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\lambda \in K$. Außerdem sei $T = T_1/T_0$ und $\tau\colon V \times W \to T$ gegeben durch $(v, w) \mapsto \delta_{(v,w)} + T_0$. Wir wollen zeigen, dass (T, τ) die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes von V und W erfüllt.

Sei also U ein weiterer K-Vektorraum und $\xi \in \mathrm{Bil}_K(V, W; U)$. Da $(\delta_{(v,w)})_{(v,w)\in V\times W}$ eine Basis von T_1 ist, können wir einen Homomorphismus $\xi_1\colon T_1 \to U$ durch

$$\xi_1(\delta_{(v,w)}) := \xi(v, w)$$

definieren. Da ξ K-bilinear ist, folgt sofort, dass die obengenannten Erzeuger von T_0 im Kern von ξ_1 liegen und damit schon $T_0 \subseteq \operatorname{Ker}\xi_1$. Somit induziert ξ_1 nach dem Homomorphiesatz einen Homomorphismus $\xi_\otimes\colon T_1/T_0 \to U$ mit $\xi_\otimes(a + T_0) = \xi_1(a)$. Insbesondere ist wie gewünscht $\xi = \xi_\otimes \circ \tau$. Durch diese Bedingung ist $\xi_\otimes$ außerdem schon auf den Erzeugern $\delta_{(v,w)} + T_0$ ($v \in V$, $w \in W$) von T festgelegt, woraus auch sofort die Eindeutigkeit von $\xi_\otimes$ folgt.