Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Einführung in die Algebra, Übungsblatt 2, Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (8+2 Punkte). Welche der Gruppen

$$C_2 \times C_2 \times C_2, \quad C_8, \quad C_4 \times C_2, \quad D_4, \quad Q_8, \quad (\mathbb{Z}/(20))^\times, \quad (\mathbb{Z}/(30))^\times, \quad \text{◹}_3(\mathbb{F}_2)$$

sind zueinander isomorph und welche nicht (gebe jeweils einen Beweis)?

Lösungsvorschlag. Auf der Menge

$$M := \{C_2 \times C_2 \times C_2, C_8, C_4 \times C_2, D_4, Q_8, (\mathbb{Z}/(20))^\times, (\mathbb{Z}/(30))^\times, \text{◹}_3(\mathbb{F}_2)\}$$

induziert $\cong$ eine Äquivalenzrelation, die wir wieder mit $\cong$ bezeichnen und deren Äquivalenzklassen wir als *Isomorphieklassen* bezeichnen. Gefragt ist nach der dazugehörigen Zerlegung $M/\cong$ von M, also nach der Menge der Isomorphieklassen. Wir behaupten:

$$M/\cong \; = \{\{C_2 \times C_2 \times C_2\}, \{C_8\}, \{C_4 \times C_2, (\mathbb{Z}/(20))^\times, (\mathbb{Z}/(30))^\times\}, \{Q_8\}, \{D_4, \text{◹}_3(\mathbb{F}_2)\}\}$$

Hierzu genügt es zu zeigen:

(a) $C_2 \times C_2 \times C_2 \ncong C_8$

(b) $C_2 \times C_2 \times C_2 \ncong C_4 \times C_2$

(c) $C_2 \times C_2 \times C_2 \ncong Q_8$

(d) $C_2 \times C_2 \times C_2 \ncong D_4$

(e) $C_8 \ncong C_4 \times C_2$

(f) $C_8 \ncong Q_8$

(g) $C_8 \ncong D_4$

(h) $C_4 \times C_2 \ncong Q_8$

(i) $C_4 \times C_2 \ncong D_4$

(j) $Q_8 \ncong D_4$

(k) $C_4 \times C_2 \cong (\mathbb{Z}/(20))^\times$

(l) $C_4 \times C_2 \cong (\mathbb{Z}/(30))^\times$

(m) $D_4 \cong \text{◹}_3(\mathbb{F}_2)$

Es folgen (c), (d), (f), (g), (h) und (i) daraus, dass $C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_4 \times C_2$ und C_8 abelsch sind (denn zyklische Gruppen sind abelsch und direkte Produkte abelscher Gruppen sind abelsch) während D_4 und Q_8 nicht abelsch sind: Um zu sehen, dass D_4 nicht abelsch ist, betrachte

$$a := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in D_4 \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in D_4$$

und rechne nach

$$ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = ba.$$

Um zu sehen, dass Q_8 nicht abelsch ist, betrachte

$$i := \begin{pmatrix} \mathring{\imath} & 0 \\ 0 & -\mathring{\imath} \end{pmatrix} \in Q_4 \qquad \text{und} \qquad j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in Q_4$$

und rechne nach

$$ij = \begin{pmatrix} 0 & \mathring{\imath} \\ \mathring{\imath} & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -\mathring{\imath} \\ -\mathring{\imath} & 0 \end{pmatrix} = ji.$$

Es bleibt (a), (b), (e), (j), (k), (l) und (m) zu zeigen. Es folgen (a) und (b) daraus, dass in $C_2 \times C_2 \times C_2$ jedes Element selbstinvers ist, was in C_8 und in $C_4 \times C_2$ offensichtlich nicht der Fall ist.

Zu (e). In C_8 gibt es ein Element der Ordnung 8 (etwa die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{8}$ gegen den Uhrzeigersinn). In C_4 ist das nicht der Fall: Nach Proposition 1.3.21 hat jedes Element von C_4 die Ordnung 1, 2 oder 4. Dann gilt für $(a,b) \in C_4 \times C_2$, dass $(a,b)^{\operatorname{ord}(a)} = (a^{\operatorname{ord}(a)}, b^{ord(a)}) = (1,1) = 1$, denn $b^{\operatorname{ord}(a)} = 1$, weil $\operatorname{ord}(a)$ gerade ist. Damit ist auch jedes Element von $C_4 \times C_2$ von der Ordnung 1, 2 oder 4.

Zu (j). Nach Aufgabe 3 auf Blatt 1 gibt es in Q_8 nur genau ein Element der Ordnung 2 (nämlich -1), während die vier Spiegelungen in D_4 allesamt Ordnung 2 haben.

Zu (k). Man überprüft leicht

$$(\mathbb{Z}/(20))^\times = \{1,3,7,9,11,13,17,19\},$$

mit der üblichen Notation $1 := \overline{1} \in \mathbb{Z}/(20)$, $2 := 1+1 = \overline{1}+\overline{1} = \overline{2} \in \mathbb{Z}/(20)$, $3 := 1+1+1 \in \mathbb{Z}/(20)$ und so weiter. Es ist also $(\mathbb{Z}/(20))^\times$ eine achtelementige Gruppe mit Elementen a und b (nämlich $a := 3$ und $b := 11$), für die gilt

$$(*) \qquad \operatorname{ord}(a) = 4,\ \operatorname{ord}(b) = 2,\ b \notin \langle a \rangle \text{ und } ab = ba.$$

Auch $C_4 \times C_2$ ist eine achtelementige Gruppe, in der es a und b mit $(*)$ gibt. Daher folgt (k) aus folgender allgemeinerer Hilfsbehauptung 1:

Hilfsbehauptung 1: Je zwei achtelementige Gruppen, in denen es Elemente a und b mit $(*)$ gibt, sind isomorph.

Begründung: Wir zeigen, dass je zwei solche Gruppen eine Multiplikationstabelle derselben Gestalt haben (vergleiche Bemerkung 1.2.6 aus der Vorlesung). Sei hierzu G eine achtelementige Gruppe und seien $a, b \in G$ mit $(*)$. Dann wissen wir aus Proposition

1.3.21, dass die von a erzeugte Untergruppe $\langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$ vierelementig ist. Damit ist auch $\{b, ab, a^2b, a^3b\}$ vierelementig und mit $b \notin \langle a \rangle$ erhält man leicht, dass diese beiden vierelementigen Teilmengen von G disjunkt sind. Daher gilt

$$G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

und die Multiplikationstabelle von G ist eindeutig festgelegt, da man unter Kenntnis von $a^4 = a$, $b^2 = b$ und $ab = ba$ das Produkt je zweier Elementen von G leicht ermitteln kann (zum Beispiel gilt $(a^3)(a^2b) = a^5b = ab$ und $(a^2b)(a^2b) = a^4b^2 = 1$).

Zu (l). Man überprüft leicht

$$(\mathbb{Z}/(30))^\times = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}.$$

Es ist also $(\mathbb{Z}/(30))^\times$ wieder eine achtelementige Gruppe mit Elementen a und b, für die $(*)$ gilt, nämlich $a := 7$ und $b := 11$. Daher folgt (l) analog zu (k) wieder aus der obigen Hilfsbehauptung 1.

Zu (m). Es ist $\text{◹}_3(\mathbb{F}_2)$ eine achtelementige Gruppe mit Elementen a und b, für die gilt

$$(**) \qquad \operatorname{ord}(a) = 4,\ \operatorname{ord}(b) = 2,\ b \notin \langle a \rangle \text{ und } ab = ba^3,$$

nämlich

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Tat:

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$ba^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch D_4 ist eine achtelementige Gruppe, in der es a und b mit $(**)$ gibt (nehme für a die Drehung um einen rechten Winkel gegen den Uhrzeigersinn und für b die Spiegelung an der ersten Achse). Daher folgt (l) aus folgender allgemeinerer Hilfsbehauptung 2:

Hilfsbehauptung 2: Je zwei achtelementige Gruppen, in denen es Elemente a und b mit $(**)$ gibt, sind isomorph.

Hilfsbehauptung 2 kann völlig analog zu Hilfsbehauptung 1 begründet werden.

Damit ist Aufgabe 1 vollständig gelöst mit Mitteln, die zum Zeitpunkt der Aufgabenstellung zur Verfügung standen.

Wir deuten zusätzlich noch an, wie man andere Werkzeuge nutzen könnte, die mittlerweile in der Vorlesung bereit gestellt wurden (Satz 1.4.6, Beispiel 1.4.7 und Korollar 1.4.8) oder die noch bereit gestellt werden oder bereits bekannt sind (der Chinesische Restsatz).

Hilfsbehauptung 1 könnte man auch mit Korollar 1.4.8 begründen: Sei G eine achtelementige Gruppe und seien $a, b \in G$ mit $(*)$. Dann gilt offensichtlich $H := \langle a \rangle \cong C_4$ und $I := \langle b \rangle \cong C_2$. Aus $(*)$ folgt leicht $HI = G$, $H \cap I = \{1\}$ und dass jedes Element von H mit jedem Element von I kommutiert. Aus Korollar 1.4.8 folgt nun $G \cong H \times I$ und daher $G \cong C_4 \times C_2$.

Hilfsbehauptung 2 könnte man auch mit Satz 1.4.6 begründen: Sei G eine achtelementige Gruppe und seien $a, b \in G$ mit $(**)$. Dann gilt offensichtlich $N := \langle a \rangle \cong C_4$ und $H := \langle b \rangle \cong C_2$. Aus $(**)$ folgt leicht $N \lhd G$ und $N \rtimes H = G$. Mit

$$\varphi\colon H \to \operatorname{Aut}(N),\ y \mapsto (x \mapsto yxy^{-1})$$

ist nach Satz 1.4.6 die Gruppe G isomorph zum semidirekten Produkt $N \rtimes_\varphi H$. Nun gilt $\varphi(1) = 1 = \mathrm{id}_N$ und für das einzige nichtneutrale Element von H, nämlich für b gilt

$$\varphi(b)(x) = bxb^{-1} = bxb \overset{(**)}{=} b^2x^{-1} = x^{-1} \qquad \text{für alle } x \in N.$$

Offensichtlich gilt daher $G \cong N \rtimes_\varphi H \cong C_4 \rtimes_\psi C_2$, wobei $\psi\colon C_2 \to \operatorname{Aut}(C_4)$ gegeben ist durch $\psi(1) = 1 = \mathrm{id}_{C_4}$ und $\psi(y)(x) = x^{-1}$ für das einzige nichtneutrale Element y von C_2 und für alle $x \in C_4$. Dies zeigt Hilfsbehauptung 2. (Nach Beispiel 1.4.7 gilt übrigens $C_4 \rtimes_\psi C_2 \cong D_4$.)

Später in der Vorlesung wird noch der Chinesische Restsatz bewiesen werden, den man alternativ benutzen kann, um (k) und (l) zu zeigen: Nach diesem Satz bestehen wegen der Zerlegungen $20 = 5 \cdot 4$ und $30 = 5 \cdot 3 \cdot 2$ paarweise Isomorphien *von Ringen*

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}/(20) \cong \mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(4) \qquad \text{und} \\ &\mathbb{Z}/(30) \cong \mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(2), \end{aligned}$$

woraus die Isomorphien der zugehörigen Einheitengruppen folgt:

$$\begin{aligned} &(\mathbb{Z}/(20))^\times \cong (\mathbb{Z}/(5))^\times \times (\mathbb{Z}/(4))^\times \qquad \text{und} \\ &(\mathbb{Z}/(30))^\times \cong (\mathbb{Z}/(5))^\times \times (\mathbb{Z}/(3))^\times \times (\mathbb{Z}/(2))^\times. \end{aligned}$$

Es reicht daher $(\mathbb{Z}/(5))^\times \cong C_4$, $(\mathbb{Z}/(4))^\times \cong C_2 \cong (\mathbb{Z}/(3))^\times$ und $(\mathbb{Z}/(2))^\times \cong C_1$ zu zeigen, was sehr leicht ist und was wir dem Leser überlassen.