Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Einführung in die Algebra, Übungsblatt 4, Lösungsvorschlag

Aufgabe 3 (7+2 Punkte). Sei $R := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(Q_8) \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$. Zeige:

(a) R ist ein Unterring von $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

(b) $R^\times = R \setminus \{0\}$.

Lösungsvorschlag. (a) Gemäß Proposition 2.1.6 reicht zu zeigen $-1 \in R$, $R + R \subseteq R$ und $R \cdot R \subseteq R$.

Da R per Definition ein Untervektorraum, also insbesondere eine Untergruppe von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist, folgt sofort $R + R \subseteq R$, sowie $-1 = -I_2 \in R$, da $1 = I_2 \in Q_8 \subseteq R$.

Die Multiplikation in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist $\mathbb{R}$-bilinear und Q_8 ist unter Multiplikation abgeschlossen (nach Blatt 1), also ist es auch $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(Q_8)$: Seien $a_g, b_g \in \mathbb{R}$ für $g \in Q_8$, so ist

$$\left(\sum_{g\in Q_8} a_g g\right)\left(\sum_{h\in Q_8} b_h h\right) = \sum_{g,h\in Q_8} \underbrace{a_g b_h}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{gh}_{\in Q_8} \in R$$

(b) Da für alle $a \in R$ gilt $a \cdot 0 = 0 \neq 1$ ist $0 \notin R^\times$. Sei nun $x \in R \setminus \{0\}$. Zu zeigen ist $x \in R^\times$. Sei $x = a1 + bi + cj + dk$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wir definieren $x^* := a1 - bi - cj - dk$. Wir verwenden die Relationen $g^2 = -1$ und $gh = -hg$ für $g \neq h \in \{i, j, k\}$ um zu bekommen

$$\begin{aligned}
x^*x &= (a1 - bi - cj - dk)(a1 + bi + cj + dk) \\
&= a^2 1 + \underbrace{ab1i - abi1 + ac1j - acj1 + ad1k - adk1}_{=0} \\
&\quad \underbrace{-bcij - bcji - bdik - bdki - cdjk - cdkj}_{=0} \\
&\quad - bi^2 - cj^2 - dk^2 \\
&= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)1 \in \mathbb{R}1.
\end{aligned}$$

Ist $x \neq 0$ so ist $n := a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^\times$. Mit der gleichen Rechnung (b, c, d jeweils ersetzt durch $-b, -c, -d$) bekommen wir auch $xx^* = n1 = x^*x$. Damit ist $x(\frac{1}{n}x^*) = (\frac{1}{n}x^*)x = \frac{1}{n}x^*x = \frac{n}{n}1 = 1$, also $x \in R^\times$ mit Inversem $x^{-1} = \frac{1}{n}x^*$.