

---

Übungsblatt 10 zur Einführung in die Algebra

---

**Aufgabe 1.** Sei  $L|K$  eine algebraische Körpererweiterung und  $R$  ein Zwischenring, das heißt ein Unterring von  $L$ , der  $K$  enthält. Zeige, dass  $R$  ein Zwischenkörper von  $L|K$  ist.

**Aufgabe 2.** Seien  $p, q \in \mathbb{P}$  mit  $p \neq q$ . Zeige  $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$  und bestimme

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}].$$

**Aufgabe 3.** Für jede Teilmenge  $M$  der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \cong \mathbb{R}^2$  sei

- $\text{Ge}(M)$  = Menge der Geraden, die zwei verschiedene Punkte von  $M$  enthalten  
 $\text{Kr}(M)$  = Menge der Kreise, deren Mittelpunkt in  $M$  liegt und deren Radius gleich dem Abstand zweier Punkte aus  $M$  ist.

Wir betrachten dann die folgenden *elementaren Konstruktionsschritte*:

- ( $\times$ ) Schnitt zweier verschiedener Geraden aus  $\text{Ge}(M)$
- ( $\emptyset$ ) Schnitt einer Geraden aus  $\text{Ge}(M)$  mit einem Kreis aus  $\text{Kr}(M)$
- ( $\odot$ ) Schnitt zweier verschiedener Kreise aus  $\text{Kr}(M)$ .

Für jede Menge  $M \subseteq \mathbb{C}$  sei  $M' \subseteq \mathbb{C}$  die Menge  $M$  vereinigt mit den Schnittpunkten, die man durch Anwendung von ( $\times$ ), ( $\emptyset$ ) und ( $\odot$ ) erhalten kann. Man nennt die Elemente von  $M'$  die in einem Schritt aus  $M$  konstruierbaren Punkte. Nun definieren wir für  $M \subseteq \mathbb{C}$  induktiv die Menge  $M^{(n)}$  der in  $n$  Schritten ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) aus  $M$  konstruierbaren Punkte durch  $M^{(0)} := M$  und  $M^{(n+1)} := (M^{(n)})'$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ . Schließlich sagen wir, die Punkte aus

$$\star M := \bigcup \{M^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sind *mit Zirkel und Lineal aus  $M$  konstruierbar*. Zeige durch geometrische Konstruktionen (stichpunktartig kommentierte Skizzen), dass für jedes  $M \subseteq \mathbb{C}$  mit  $\{0, 1\} \subseteq M$ , die Menge  $\star M$  einen Zwischenkörper von  $\mathbb{C}|\mathbb{Q}(i)$  bildet.

**Abgabe** bis Montag, den 19. Januar, um 9:55 Uhr in die Zettelkästen neben F411.