Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1.

(a) Seien K ein Körper, $f \in K[X]$ mit $\deg f = d \in \mathbb{N}_0$ und L der Zerfällungskörper von f über K. Zeige $[L : K] \leq d!$.

(b) Zeige, dass $f = X^3 - 2$ irreduzibel über $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi \mathring{\imath}}{3}})$ ist und bestimme jeweils den Grad des Zerfällungskörpers von f über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi \mathring{\imath}}{3}})$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $a \in K(X) \setminus K$. Zeige

(a) Durch $\varphi(X) = a$ und $\varphi|_K = \mathrm{id}_K$ wird eine Körpereinbettung $\varphi \colon K(X) \to K(X)$ gegeben.

(b) Bestimme den Körpergrad $[K(X) : \varphi(K(X))]$.

Aufgabe 3.

(a) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung mit $\operatorname{char} K \neq 2$. Zeige

$$[L : K] \leq 2 \iff \exists a \in K : L = K(\sqrt{a}).$$

Hinweis: Mache eine „quadratische Ergänzung“.

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{0, 1\} \subseteq M$, $K := \mathbb{Q}(M \cup M^*)$ wie auf dem letzten Blatt und $a \in \mathbb{C}$. Zeige $a \in \Lambda\!\!\!\!\smile M$ genau dann, wenn es $n \in \mathbb{N}_0$ und Zwischenkörper $F_0, \ldots, F_n$ von $\mathbb{C}|K$ mit $K = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ gibt mit $a \in F_n$ und $[F_k : F_{k-1}] = 2$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Hinweis: Zeige, um leichter Induktion durchführen zu können, dass sogar $F_n^* = F_n$ gewählt werden kann.

(c) Zeige, dass das regelmäßige 7-Eck nicht aus $M = \{0, 1\}$ konstruierbar ist.

Hinweis: Bestimme den Grad des Minimalpolynoms von $e^{\frac{2\pi \mathring{\imath}}{7}}$ über $\mathbb{Q}$.

Abgabe bis Montag, den 2. Februar, um 9:55 Uhr in die Zettelkästen neben F411.