Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Einführung in die Algebra, Übungsblatt 13, Lösungsvorschlag

Aufgabe 3. Sei K vollkommen und $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung derart, dass jedes Polynom aus $K[X] \setminus K$ in L eine Nullstelle hat. Zeige, dass L algebraisch abgeschlossen ist.

Hinweis: Verwende den Satz vom primitiven Element, um die Aussage auf Aufgabe 2 von Blatt 11 zurückzuführen.

Lösungsvorschlag. Sei $f \in K[X] \setminus K$. Dem Hinweis folgend, reicht es zu zeigen, dass f über L zerfällt. Sei F ein Zerfällungskörper von f über K. Da K vollkommen ist, ist $F|K$ separabel. Außerdem ist $F|K$ selbstverständlich endlich nach 4.3.6(a). Nach dem Satz vom primitiven Element existiert daher ein $a \in F$ mit $F = K(a)$. Es zerfällt also f über $K(a)$. Damit zerfällt f natürlich auch über jedem zu $K(a)$ über K isomorphen Oberkörper von K. Es reicht daher zu zeigen, dass es einen zu $K(a)$ über K isomorphen Zwischenkörper von $L|K$ gibt. Bezeichne $g \in K[X]$ das Minimalpolynom von a über K. Nach Voraussetzung hat g eine Nullstelle b in L. Nach 4.2.15 sind $K(a)$ und $K(b)$ K-isomorph, weshalb f auch über $K(b)$ zerfällt.