Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
16. März 2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer
Wintersemester 2014/2015

Klausur zur Einführung in die Algebra

Familienname: **Vorname:**

Matrikelnummer: Übungsgruppenleiter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punktzahl								
Korrektor (Initialen)								
Maximalpunktzahl	10	20	12	12	6	30		90
Bonuspunkte					8		12	20

Fasse den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entferne nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, trage auf **jeder Vorderseite sofort** Deinen Namen ein. Schreibe die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Du noch genug Zeit hast, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergiss aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Zögere bei Fragen nicht, Dich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen.

Die Bearbeitungszeit wird mündlich bekanntgegeben und beträgt etwa 170 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind ein "Spickzettel"[1], Schreibzeug und Schmierpapier[2]. Viel Erfolg!

Es können maximal 90 Punkte erreicht werden. Fehlende Punkte können durch Bonuspunkte ausgeglichen werden (mit einer Begründung bei Aufgabe 5 oder mit Aufgabe 7). Sofern nichts anderes gesagt ist, sind alle Antworten zu begründen.

Eigentlich selbstverständlich, aber wichtig: Wenn man eine Teilaufgabe nicht lösen kann, so kann man unter Verwendung der darin behaupteten Aussagen zunächst spätere Teilaussagen bearbeiten (und Punkte dafür bekommen).

[1] ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4
[2] anfangs unbeschrieben

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte). Betrachte die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ aller invertierbaren 2×2-Matrizen über dem zweielementigen Körper $\mathbb{F}_2$.

(a) Gib alle Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ explizit an! Führe dabei jede nur einmal auf! Eine Begründung ist nicht erforderlich. Notation aus der Vorlesung darf natürlich benutzt werden. (5 Punkte)

(b) Argumentiere, warum es außer den in (a) aufgeführten Untergruppen keine weiteren mehr gibt. (5 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 1:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (20 Punkte). Sei G eine Gruppe der Ordnung 14. Zeige:

(a) G besitzt genau eine Untergruppe N der Ordnung 7. (3 Punkte)

(b) N ist ein Normalteiler von G (in Zeichen: $N \lhd G$). (1 Punkt)

(c) G besitzt eine Untergruppe H der Ordnung 2. (Fixiere im folgenden eine solche.) (2 Punkte)

(d) G ist semidirektes Produkt von N und H (in Zeichen: $G = N \rtimes H$). (2 Punkte)

(e) $H \cong C_2$ und $N \cong C_7$ (2 Punkte)

(f) Bezeichnet h das eindeutig bestimmte Element von H mit $H = \{1, h\}$, so gibt es ein $k \in \{1, \ldots, 6\}$ derart, dass $hxh^{-1} = x^k$ für alle $x \in N$. (2 Punkte)

(g) $x = x^{k^2}$ für alle $x \in N$ (2 Punkte)

(h) $k \in \{1, 6\}$ (2 Punkte)

(i) Es gibt bis auf Isomorphie höchstens zwei Gruppen der Ordnung 14. (2 Punkte)

(j) $G \cong C_{14}$ oder $G \cong D_7$ (2 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 2:

Seite 2 zur Aufgabe 2

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (12 Punkte). Betrachte das Polynom $f := 2X^5 - 6X + 6 \in \mathbb{Z}[X]$. In welchen der folgenden Ringe ist f irreduzibel? Begründe jeweils Deine Antwort.

(a) $\mathbb{Z}[X]$ (2 Punkte)

(b) $(S^{-1}\mathbb{Z})[X]$ mit $S := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ (4 Punkte)

(c) $\mathbb{Q}[X]$ (4 Punkte)

(d) $\mathbb{R}[X]$ (1 Punkt)

(e) $\mathbb{C}[X]$ (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 3:

Seite 2 zur Aufgabe 3

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (12 Punkte). Betrachte den Unterring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \mathbb{Z}[\sqrt{2}\mathring{i}] = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

von $\mathbb{C}$. Zu $x = a + b\sqrt{-2}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ sei $x^* := a - b\sqrt{-2}$ und $N(x) := x^*x \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeige, dass $x \mapsto x^*$ ein selbstinverser Automorphismus des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ist. (2 Punkte)

(b) Zeige $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. (2 Punkte)

(c) Zeige $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]^\times = \{-1, 1\}$. (2 Punkte)

(d) Entscheide, ob 2 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ irreduzibel ist. (2 Punkte)

(e) Entscheide, ob $1 + \sqrt{-2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ irreduzibel ist. (2 Punkte)

(f) Schreibe das Ideal $(2, 1 + \sqrt{-2})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ als Hauptideal, das heißt finde ein $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ mit $(2, 1 + \sqrt{-2}) = (x)$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. (2 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 4:

Seite 2 zur Aufgabe 4

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (6 Punkte + 8 Bonuspunkte). Welche der folgenden drei Ideale in $\mathbb{C}[X,Y]$ sind Primideale? Welche sind maximale Ideale?

$$I := (XY), \qquad J := (X+Y), \qquad K := (X,Y)$$

Eine Begründung ist nicht erforderlich. Bei vollständiger Begründung gibt es aber bis zu 8 Bonuspunkten.

Lösung zur Aufgabe 5:

Seite 2 zur Aufgabe 5

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (30 Punkte). Betrachte die reelle Zahl $x := \sqrt{2+\sqrt{2}}$ und den Körper $L := \mathbb{Q}(x)$.

(a) Finde ein normiertes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 4 mit $f(x) = 0$. (2 Punkte)

(b) Zeige, dass f aus (a) irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist. (3 Punkte)

(c) Begründe, warum es genau ein f wie in (a) gibt. (2 Punkte)

(d) Bestimme alle vier verschiedenen Nullstellen a_1, a_2, a_3, a_4 von f in $\mathbb{C}$. (3 Punkte)

(e) Zeige, dass L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist. (3 Punkte)

Hinweis: Betrachte Produkte $a_i a_j$.

(f) Begründe, warum $L|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist. (2 Punkte)

(g) Begründe, warum es für jedes $i \in \{1, \ldots, 4\}$ genau ein $\varphi_i \in \operatorname{Aut}(L|\mathbb{Q})$ gibt mit $\varphi_i(a_1) = a_i$. (3 Punkte)

(h) Zeige $\operatorname{Aut}(L|\mathbb{Q}) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$. (2 Punkte)

(i) Berechne $\varphi_i(\sqrt{2})$ für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. (2 Punkte)

Hinweis: Betrachte $\varphi_i(a_1^2)$.

(j) Berechne $\varphi_i(a_j)$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. (4 Punkte)

Hinweis: Es kann dabei helfen, gewisse $\varphi_i(a_j a_k)$ zu betrachten.

(k) Zeige $\operatorname{Aut}(L|\mathbb{Q}) \cong C_4$. (2 Punkte)

(l) Bestimme alle Zwischenkörper von $L|\mathbb{Q}$. (2 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 6:

Seite 2 zur Aufgabe 6

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 4 zur Aufgabe 6

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Name: **Seite 5 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 6 zur Aufgabe 6

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Bonusaufgabe 7 (12 Bonuspunkte). Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Betrachte die multiplikativen Gruppen $L^\times$ und $K^\times$ sowie deren Quotientengruppe $L^\times/K^\times$.

(a) Gib eine Bijektion an zwischen $L^\times/K^\times$ und der Menge $\mathscr{U}$ der eindimensionalen Unterräume des K-Vektorraums L (mit Beweis). (5 Punkte)

Es sei nun $L^\times/K^\times$ endlich und $L \neq K$.

(b) Zeige, dass K endlich ist. (5 Punkte)

(c) Zeige, dass L endlich ist. (2 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 7:

Seite 2 zur Aufgabe 7

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7: