Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2012

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring. Ist $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal, so ist das Komplement $S := R \setminus \mathfrak{p} \subseteq R$ multiplikativ (im Gegensatz zu $\mathfrak{p}$, denn $1 \notin \mathfrak{p}$) und man meint mit Lokalisierung nach $\mathfrak{p}$ die Lokalisierung nach S. Sind $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal, M und N R-Moduln und $f\colon M \to N$ ein Homomorphismus, so schreibt man $R_\mathfrak{p} := S^{-1}R$, $M_\mathfrak{p} := S^{-1}M$ und $f_\mathfrak{m} := S^{-1}f$ für die Lokalisierungen von R, M und f nach $\mathfrak{p}$. Zeige folgende „Lokal-Global-Prinzipien“:

(a) Ein Modul ist genau dann der Nullmodul, wenn jede seiner Lokalisierungen nach einem maximalen Ideal der Nullmodul ist.

(b) Ein Element x in einem R-Modul M ist genau dann null, wenn $\frac{x}{1}$ in jeder Lokalisierung von M nach einem maximalen Ideal von R null ist.

(c) Ein Homomorphismus f von R-Moduln ist genau dann null/injektiv/surjektiv, wenn jede seiner Lokalisierungen nach einem maximalen Ideal von R null/injektiv/surjektiv ist.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) R ist lokal;

(b) R besitzt ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $1 + \mathfrak{m} \subseteq R^\times$;

(c) $0 \neq 1$ in R und für alle $x \in R$ ist $x \in R^\times$ oder $x + 1 \in R^\times$.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring mit einem Primideal $\mathfrak{p}$. Zeige, dass dann $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ist und dass eine kanonische Isomorphie

$$R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \cong \operatorname{qf}(R/\mathfrak{p})$$

besteht.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und bezeichne $\mathcal{U}$ die Menge der Umgebungen von x. Wir betrachten den Ring $C := \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon f|_U \text{ stetig }\}$ und darin das Ideal $I := \{f \in C \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon f|_U = 0\}$. Zeige, dass $A := C/I$ lokal ist. Die Elemente von A heißen *Funktionenkeime* in x.

Abgabe bis Dienstag, den 15. Mai, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .