
Übungsblatt 3 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (Inverser Limes) Ein *System von Homomorphismen* abelscher Gruppen ist ein Tripel $S = (I, (X_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i, j \in I, i \prec j})$, wobei

- (1) I eine halbgeordnete Menge ist, deren Halbordnung wir mit \preceq notieren,
- (2) X_i für jedes $i \in I$ eine abelsche Gruppe ist,
- (3) $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \prec j$ ein Homomorphismus ist und
- (4) $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ für alle $i, j, k \in I$ mit $i \prec j \prec k$ gilt.

Sei $S = (I, (X_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i, j \in I, i \prec j})$ ein System von Homomorphismen abelscher Gruppen. Ist X eine abelsche Gruppe, so nennen wir eine Familie $(g_i)_{i \in I}$ von Homomorphismen $g_i: X \rightarrow X_i$ ($i \in I$) mit S *verträglich*, wenn

- (5) $f_{ij} \circ g_i = g_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \prec j$.

Ein *inverser Limes* (oft auch *projektiver Limes* genannt) von S ist ein Paar $(X, (\pi_i)_{i \in I})$ bestehend aus einer abelschen Gruppe X und einer mit S verträglichen Familie $(\pi_i)_{i \in I}$ von Homomorphismen (genannt *Projektionen*) $\pi_i: X \rightarrow X_i$ ($i \in I$) mit folgender „universellen“ Eigenschaft: Für jede abelsche Gruppe Y und jedes mit S verträgliche System $(g_i)_{i \in I}$ von Homomorphismen $g_i: Y \rightarrow X_i$ ($i \in I$) gibt es genau einen Homomorphismus $g: Y \rightarrow X$ mit

- (6) $\pi_i \circ g = g_i$ für alle $i \in I$.

Der inverse Limes von S wird mit $\varprojlim S$ bezeichnet oder, wenn S aus dem Kontext klar ist, auch mit $\varprojlim_{i \in I} X_i$.

- (a) Zeige, dass der inverse Limes eines Systems abelscher Gruppen durch seine universelle Eigenschaft (im üblichen Sinne) eindeutig bestimmt ist.
- (b) Zeige, dass inverse Limes eines Systems abelscher Gruppen stets existiert.

Hinweis: Wenn die Halbordnung auf I die Identität ist, kann man $\varprojlim_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} X_i$ nehmen und im allgemeinen Fall eine Untergruppe davon.

- (c) Bleiben die obigen Aussagen auch für Ringe und R -Moduln (wobei R ein Ring sei) anstelle von abelschen Gruppen richtig?

Aufgabe 2. Sei $I := \mathbb{N}$ geordnet durch $i \preceq j : \iff j \leq i$ ($i, j \in I$), R ein kommutativer Ring und $f_{ij} : R[X]/(X^i) \rightarrow R[X]/(X^j)$ der kanonische Homomorphismus für alle $i, j \in I$ mit $i \preceq j$. Den Ring

$$R[[X]] := \varprojlim_{i \in I} R[X]/(X^i) := \varprojlim(I, (R[X]/(X^i))_{i \in I}, (f_{ij})_{i \prec j})$$

nennt man den Potenzreihenring in einer Variablen X über R . Bezeichne

$$\pi_i : R[[X]] \rightarrow R[X]/(X^i)$$

für jedes $i \in I$ die zugehörige Projektion.

(a) Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in R . Zeige, dass es genau ein $f \in R[[X]]$ gibt mit

$$\pi_k(f) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dieses f bezeichnet man mit $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$.

(b) Zeige

$$R[[X]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \text{ Folge in } R \right\}.$$

(c) Zeige, dass für alle Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ in R gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i \quad \text{und} \\ \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k. \end{aligned}$$

(d) Sei $K := R$ ein Körper. Zeige, dass $K[[X]]$ ein lokaler Ring ist mit maximalem Ideal (X) und Restklassenkörper K .

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Wie in Aufgabe 4 auf Blatt 2 seien $R := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists U \in \mathcal{U} : f|_U \text{ stetig}\}$, $I := \{f \in R \mid \exists U \in \mathcal{U} : f|_U = 0\}$ und $A := R/I$. Zeige, dass $\mathfrak{m} := \{f \in R \mid f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal von R ist und dass kanonisch $R_{\mathfrak{m}} \cong A$ gilt. Zeige außerdem, dass man im Fall $(X, x) = (\mathbb{R}, 0)$ den Ring R durch $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ersetzen kann.

Abgabe bis Dienstag, den 29. Mai, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .