Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2012

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein lokaler noetherscher Ring und $K \subseteq R$ ein Körper. Zeige, dass jedes Parametersystem von R algebraisch unabhängig über K ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $A := K[x, y] = K[X, Y]/(X^3 - Y^2)$ mit $x := \overline{X}$ und $y := \overline{Y}$. Wir betrachten die lokalen Ringe $A_1 := A_{(x,y)}$ und $A_2 := A_{(x-1,y-1)}$. Finde für $i \in \{1, 2\}$ jeweils ein Parametersystem von A_i, nenne das davon erzeugte Ideal I_i und bestimme die Länge des A_i-Moduls A_i/I_i.

Aufgabe 3. Seien R ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} R$, M ein R-Modul, $n \in \mathbb{N}$ und $N_1, \ldots, N_n$ $\mathfrak{p}$-primäre Untermoduln von M. Zeige, dass dann auch $N_1 \cap \cdots \cap N_n$ ein $\mathfrak{p}$-primärer Untermodul von M ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ multiplikativ, $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} R$, M ein R-Modul, N ein $\mathfrak{p}$-primärer Untermodul von M und $\iota : M \to S^{-1}M, x \mapsto \frac{x}{1}$. Zeige folgende Aussagen:

(a) Ist $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, so ist $S^{-1}N$ ein $S^{-1}\mathfrak{p}$-primärer Untermodul von $S^{-1}M$ und es gilt $\iota^{-1}(S^{-1}N) = N$.

(b) Ist $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$, so gilt $S^{-1}N = S^{-1}M$.

Abgabe bis Dienstag, den 10. Juli, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .