Kapitel 1

Einstieg und Wiederholung

1.1 Vorbemerkungen und erste Beispiele

Die Objekte, mit denen wir uns in dieser Vorlesung vorrangig beschäftigen werden, sind **Normierte Vektorräume**. Es sei ‚immer' $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:

Definition

$X := (X, a, s, \| \; \|)$ *„Normierter Vektorraum" („NVR") über* $\mathbb{K} :\Longleftrightarrow$
(X, a, s) *Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *und* $\| \; \|$ *„Norm" auf* X, *d. h.:*

(N0) $\| \; \| \colon X \ni x \longmapsto \|x\| \in [0, \infty[$ *mit*

(N1) $\|x\| = 0 \implies x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (für $x, y \in X$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$)

Ohne Forderung (N1)*:*
„Halbnorm", „Halbnormierter Vektorraum" („HNVR")

Zur Erinnerung:

$X = (X, a, s)$ *„Vektorraum" („VR", linearer Raum) über* $\mathbb{K} :\Longleftrightarrow$
X *nichtleere Menge und*

$$a \colon X \times X \ni (x, y) \longmapsto x + y \in X$$
$$s \colon \mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \longmapsto \alpha x \in X \quad \textit{mit}$$

(A1) *a assoziativ*

(A2) *a kommutativ*

(A3) $\dot{\exists}\, 0 \in X \quad \forall\, x \in X \quad x + 0 \;=\; x$

(A4) $\forall\, x \in X \quad \dot{\exists}\, y \in X \quad x + y \;=\; 0$ (Bezeichnung: $y =: -x$)

(SK1) $(\alpha\beta)x \;=\; \alpha(\beta x)$

(SK2) $\alpha(x+y) \;=\; \alpha x + \alpha y$

(SK3) $(\alpha+\beta)x \;=\; \alpha x + \beta x$

(SK4) $1x \;=\; x$ (für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$)

Das ‚Rechnen' und die üblichen Bezeichnungen im VR werden als bekannt vorausgesetzt.

Bemerkung 1.1.1

Vor.: X *HNVR*

Beh.: $\|0\| \;=\; 0$

$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \;\leq\; \|x - y\| \qquad (\ldots)$

Beweis: □ □ □ $\square$

Bemerkung 1.1.2

Vor.: X *HNVR*

Bez.: $\delta(x,y) := \|x-y\| \qquad (\ldots)$

Beh.: *a)* (X,δ) *semimetrischer Raum,*

b) *Falls* X *NVR:* (X,δ) *metrischer Raum;* dabei:

Definition

$(\mathfrak{R},\varrho)$ *„semimetrischer Raum" („SMR",* ϱ *„Semimetrik" auf* $\mathfrak{R}$*)*

$:\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{R}$ *nichtleere Menge und* $\varrho\colon \mathfrak{R}\times\mathfrak{R} \ni (x,y) \longmapsto \varrho(x,y) \in [0,\infty[$ *mit*

$$\begin{aligned} \varrho(x,x) \;&=\; 0 \\ \varrho(x,y) \;&=\; \varrho(y,x) && \text{(‚Symmetrie')} \\ \varrho(x,z) \;&\leq\; \varrho(x,y) + \varrho(y,z) \quad (\ldots) && \text{(‚Dreiecksungleichung')} \end{aligned}$$

($\varrho(x,y)$ *„Abstand zwischen* x *und* y*")*

$(\mathfrak{R},\varrho)$ *„metrischer Raum" („MR",* ϱ *„Metrik" auf* $\mathfrak{R}$*)*

$:\Longleftrightarrow$ $(\mathfrak{R},\varrho)$ *SMR* $\wedge \big[\varrho(x,y) = 0 \implies x = y\big] \quad (\ldots)$ *(‚Definitheit')*

Beweis der Bemerkung 1.1.2: □ □ □ $\square$

⟨Anmerkung zu ‚Pseudometriken' □ □ □⟩

Beispiele

(B1) $\mathbb{K}$ ist (mit üblicher Addition, Multiplikation und Betrag) ein *NVR*.

(B2) $\mathbb{K}^n$ $(\ldots)$, $\|x\|_\infty := \max\limits_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \quad \big(x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n\big)$ *NVR*

(B3) $\mathbb{K}^n$ $(\ldots)$, $\|x\|_2 := \Big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2\Big)^{1/2} \quad \big(x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n\big)$ *NVR*

(B4) $\mathbb{K}^n$ $(\ldots)$, $\|x\|_1 := \sum\limits_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \quad \big(x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n\big)$ *NVR*

(B5) $-\infty < a < b < \infty$, $\mathrm{C}^{\mathbb{K}}[a,b] := \big\{ f \mid f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \text{ stetig} \big\}$
(Addition und Multiplikation mit Skalaren ‚punktweise'),
$\|h\|_s := \max\limits_{x\in[a,b]} |h(x)|$: *NVR*

(B6) $\mathfrak{R}$ nichtleere Menge, $\delta(x,y) := \begin{cases} 0\,, & x = y \\ 1\,, & x \neq y \end{cases}$:
$(\mathfrak{R},\delta)$ MR (δ *„diskrete Metrik"*)

(B7) $(\mathfrak{R},\delta)$ SMR und $\varphi\colon [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ mit
$\varphi(0) = 0$ und $t \leq t_1 + t_2 \implies \varphi(t) \leq \varphi(t_1) + \varphi(t_2) \quad (\ldots)$
Beh.: $(\mathfrak{R},\varphi\circ\delta)$ SMR

(B7') $(\mathfrak{R},\delta)$ MR und φ wie oben mit $\big[\varphi(t) = 0 \implies t = 0\big]$, dann ist $(\mathfrak{R},\varphi\circ\delta)$ ein MR.

Beweise: (B1) – (B5): aus A I, A II bekannt $\big($(B3) wird im folgenden Abschnitt noch einmal mitbewiesen.$\big)$
(B6): □ □ □ (B7): □ □ □ (B7'): nur noch Definitheit zu zeigen: ✓ $\square$

Anwendung von (B7'):

$$(\mathfrak{R},\delta) \text{ MR}, \quad \sigma(x,y) \;:=\; \frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)} \quad (\ldots) \implies (\mathfrak{R},\sigma) \text{ MR}$$

Beweis:

$$\varphi(t) \;:=\; \frac{t}{1+t} \quad \big(t \in [0,\infty[\,\big) : s \leq t \implies \varphi(s) \;\leq\; \varphi(t) \quad (\Longleftarrow\; s + st \leq t + st)$$

$$\varphi(s+t) \;=\; \frac{s+t}{1+s+t} \;=\; \frac{s}{\ldots} + \frac{t}{\ldots} \;\leq\; \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t} \;=\; \varphi(s) + \varphi(t) \quad (\ldots) \;\square$$

Die Räume ℓ_p

Für $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\|x\|_p := \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p\right)^{1/p}.$$

Bemerkung 1.1.3 *$\| \ \|_p$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{K}^n$.*

Beweis: (N0), (N1), (N2): ✓ Für den Beweis von (N3) zeigen wir zunächst die

> HÖLDER-**Ungleichung**
>
> *Für $1 < p < \infty$, $q := \dfrac{p}{p-1}$ (also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) gilt:*
>
> $$\|x\,y\|_1 \le \|x\|_p \, \|y\|_q \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n) \qquad \textbf{(H)}$$

Beweis: Die Funktion log ist (streng) konkav $\big($da ihre Ableitung $(x \longmapsto \frac{1}{x})$ (streng) antiton ist$\big)$: $\log(a\,b) = \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \le \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$ für $a, b > 0$; also

$$\boxed{a\,b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}\,, \qquad (*)$$

was natürlich auch für $a = 0$ oder $b = 0$ richtig ist. Für den *Beweis der* HÖLDER-*Ungleichung* seien nun Œ $\|x\|_p > 0$ und $\|y\|_q > 0$:

$$\frac{\|x\,y\|_1}{\|x\|_p\,\|y\|_q} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|x_\nu|}{\|x\|_p}\,\frac{|y_\nu|}{\|y\|_q} \overset{(*)}{\le} \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{|x_\nu|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_\nu|^q}{\|y\|_q^q}\right) \overset{\checkmark}{=} 1 \qquad \square$$

Beweis von (N3): Œ $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu + y_\nu|^p \le \sum |x_\nu + y_\nu|^{p-1}|x_\nu| + \sum |x_\nu + y_\nu|^{p-1}|y_\nu| \\
&\overset{(H)}{\le} \left(\sum |x_\nu + y_\nu|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \|x\|_p + \big(\dots\big)^{1/q}\|y\|_p \\
&= \|x+y\|_p^{p/q}\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \implies
\end{aligned}$$

$$\boxed{\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p} \qquad (\text{MINKOWSKI-}\textbf{Ungleichung}) \qquad \square$$

Bezeichnung Für $1 \le p \le \infty$ heißt $1 \le q \le \infty$ genau dann *„konjugiert“* zu p, wenn $q = 1$, falls $p = \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, falls $1 < p < \infty$, und $q = \infty$, falls $p = 1$.
$\big($Mit $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\big)$

Bemerkung 1.1.4 (HÖLDER-**Ungleichung**)

> *Für $1 \le p \le \infty$ und q konjugiert zu p gilt:*
>
> $$\|x\,y\|_1 \le \|x\|_p\,\|y\|_q \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n)$$

Beweis: Nach (H) bleibt Œ $p = 1$, $q = \infty$: ✓ $\square$

Für $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ $\big(x =: (x(n)) =: (x_n)\big)$ entsprechend

$$\begin{aligned}
\|x\|_p &:= \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^p\right)^{1/p} \quad \text{, falls } 1 \le p < \infty, \quad \text{und} \\
\|x\|_\infty &:= \sup_{\nu \in \mathbb{N}} |x_\nu|\,.
\end{aligned}$$

Damit für $1 \le p \le \infty$:

$$\ell_p := \ell_p(\mathbb{K}) := \left\{\alpha \mid \alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \wedge \|\alpha\|_p < \infty\right\}$$

Bemerkung 1.1.5

> *Für $1 \le p \le \infty$ und q konjugiert zu p gilt:*
>
> $$x \in \ell_p \wedge y \in \ell_q \implies x\,y \in \ell_1 \wedge \|x\,y\|_1 \le \|x\|_p\,\|y\|_q$$

Beweis: Für $z\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $z^{(n)} = (z_1, \dots, z_n)$ $(\in \mathbb{K}^n)$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu\,y_\nu| = \left\|x^{(n)}y^{(n)}\right\|_1 \overset{(1.1.4)}{\le} \left\|x^{(n)}\right\|_p \left\|y^{(n)}\right\|_q \le \|x\|_p\,\|y\|_q$$

$(\implies$ Behauptung) $\square$

Bemerkung 1.1.6 $\big(\ell_p, \| \ \|_p\big)$ *ist ein NVR.*

Beweis: Für $p = \infty$: ✓; für $1 \le p < \infty$ z. B. wie Beweis zu (1.1.3) aus (1.1.5) oder auch wie Beweis zu (1.1.5) aus (1.1.3). $\square$

Bemerkung 1.1.7 (JENSEN-**Ungleichung**)

$$\boxed{1 \le r \le s \le \infty \implies \ell_r \subset \ell_s \wedge \|x\|_s \le \|x\|_r \quad \textit{für } x \in \ell_r}$$

Beweis: 1. Fall: $s = \infty$: ✓ 2. Fall: Œ $r < s < \infty$ und $0 < \|x\|_s$:

$$\|x\|_s^s = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^s = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^r |x_\nu|^{s-r} \le \|x\|_r^r \|x\|_\infty^{s-r} \overset{\text{1. Fall}}{\le} \|x\|_r^r \|x\|_r^{s-r} = \|x\|_r^s$$

□

1.2 Topologie semimetrischer Räume

Es sei $(\mathfrak{R}, \delta)$ ein SMR.

Bemerkung 1.2.1 $\big|\delta(a,b) - \delta(x,y)\big| \le \delta(a,x) + \delta(b,y)$ $(\ldots)$

Beweis: □□□ □

Bemerkung 1.2.2 $|\delta(a,b) - \delta(a,y)| \le \delta(b,y)$ $(\ldots)$

Für $\varepsilon \in \,]0,\infty[$ und $a \in \mathfrak{R}$ bezeichnen wir

$U_a^\varepsilon := \{x \in \mathfrak{R} : \delta(a,x) < \varepsilon\}$ *„Umgebung von a mit Radius ε“*,
$K_a^\varepsilon := \{x \in \mathfrak{R} : \delta(a,x) \le \varepsilon\}$ *„Kugel um a mit Radius ε“*,
speziell K_a^1 als *„Einheitskugel“* (um a).
$\mathfrak{R} \supset O$ *„offen“* $:\Longleftrightarrow \forall\, x \in O \quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad U_x^\varepsilon \subset O$
$\mathbb{O} := \mathbb{O}(\delta) := \{O \mid \mathfrak{R} \supset O \text{ offen}\}$ $\big($‚Immer‘ $\delta \longmapsto \mathbb{O}(\delta) \ldots\big)$

Satz 1.2.3

(O1)	$\mathbb{O} \supset \mathbb{O}_1 \Longrightarrow \bigcup_{\mathbb{O}_1} O \in \mathbb{O}$	*(in Worten: □□□)*
(O2)	$\mathbb{O} \supset \mathbb{O}_2$ *endlich* $\Longrightarrow \bigcap_{\mathbb{O}_2} O \in \mathbb{O}$	*(in Worten: □□□)*
(O1’)	$\emptyset \in \mathbb{O}$	
(O2’)	$\mathfrak{R} \in \mathbb{O}$	

Beweis: (O1), (O1’), (O2’): ✓ (O2): mit $U_x^{\varepsilon_1} \cap U_x^{\varepsilon_2} = U_x^{\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$: □□□ □

Bemerkung 1.2.4 *Für $x \in \mathfrak{R}$ und $\varepsilon > 0$:* $U_x^\varepsilon \in \mathbb{O}$

Beweis: $y \in U_x^\varepsilon \Longrightarrow U_y^{\varepsilon - \delta(y,x)} \subset U_x^\varepsilon$ □

Definition $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *„topologischer Raum“ („TR“)*
$:\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{R}$ *nichtleere* Menge und* $\mathbb{O} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{R})$ *mit* (O1), (O2), (O1’), (O2’)

Satz (1.2.3) besagt also: *Jeder SMR ist* (in ‚kanonischer Weise‘) ein *TR*.

Es sei jetzt $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ ein TR.

Für $O \subset \mathfrak{R}$: $O \in \mathbb{O} \Longleftrightarrow: O$ *„offen“*;
$\mathbb{O}$ die *„Topologie“* von $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$;
Für $x \in \mathfrak{R}$ und $U \subset \mathfrak{R}$: U *„Umgebung von x“* $:\Longleftrightarrow \exists\, O \in \mathbb{O} \quad x \in O \subset U$
$\mathbb{U}_x := \{U \mid \mathfrak{R} \supset U \text{ Umgebung von } x\}$ (*„Umgebungssystem“* von x)

Satz 1.2.5 *Für $x \in \mathfrak{R}$ gelten:*

(U0)	$\mathbb{U}_x \neq \emptyset$
(U1)	$\forall\, U \in \mathbb{U}_x \quad x \in U$
(U2)	$\forall\, U_1, U_2 \in \mathbb{U}_x \quad U_1 \cap U_2 \in \mathbb{U}_x$
(U3)	$\mathbb{U}_x \ni U \subset V \subset \mathfrak{R} \Longrightarrow V \in \mathbb{U}_x$
(U4)	$\forall\, U \in \mathbb{U}_x \quad \exists\, V \in \mathbb{U}_x \quad \forall\, y \in V \quad U \in \mathbb{U}_y$

Beweis: (U0), (U1), (U3): ✓ (U2) nach (O2); (U4): Zu U existiert $O \in \mathbb{O}$ mit $x \in O \subset U$: $V := O$ tut’s. □

Bemerkung 1.2.6 *Für $\mathfrak{R} \supset O$:*
$O \in \mathbb{O} \Longleftrightarrow \forall\, x \in O \quad O \in \mathbb{U}_x$ *(in Worten: □□□)*

Beweis: $\Longrightarrow$: nach Definition Umgebung;
$\Longleftarrow$: Zu $x \in O$ existiert $O_x \in \mathbb{O}$ so, dass $x \in O_x \subset O$: $O = \bigcup_{x \in O} O_x \in \mathbb{O}$ □

Gilt zusätzlich noch

$$\text{(U5)} \quad \forall\, (x,y) \in \mathfrak{R}^2 \quad \big[x \neq y \Longrightarrow \exists\, U \in \mathbb{U}_x \; \exists\, V \in \mathbb{U}_y \;\; U \cap V = \emptyset\big],$$

dann heißt $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ „HAUSDORFF–*Raum“ („HdR“)* oder *„T_2–Raum“*.

* etwas kommentieren ...

Bemerkung 1.2.7

$$(\mathfrak{R},\delta)\ \mathit{SMR},\ \mathfrak{R}\supset U, x\in\mathfrak{R}:\quad U\in\mathbb{U}_x \iff \exists\,\varepsilon>0\quad U_x^\varepsilon\subset U$$

Beweis: $\Longleftarrow$: nach (1.2.4)
$\Longrightarrow$: Ist $U\in\mathbb{U}_x$, dann existiert ein $O\in\mathbb{O}$ mit $x\in O\subset U$,
dazu existiert $\varepsilon>0$ mit $U_x^\varepsilon\subset O\ (\subset U)$ □

Bemerkung 1.2.8

$$(\mathfrak{R},\delta)\ \mathit{SMR}:\quad (\mathfrak{R},\delta)\ \mathit{MR}\iff(\mathfrak{R},\mathbb{O}(\delta))\ \mathit{HdR}$$

Beweis: □□□ □

1.3 Topologische Grundbegriffe

Es sei $(\mathfrak{R},\mathbb{O})$ ein TR. $\big($‚Immer': $\mathbb{O}\longmapsto\mathbb{U}=:\mathbb{U}(\mathbb{O})\big)$

Definition *Für $A\subset\mathfrak{R}$, $x\in\mathfrak{R}$:*

$\overset{\circ}{A} := \{z\in\mathfrak{R}\,|\,A\in\mathbb{U}_z\}$ *„Inneres" von A*

$x\in\overset{\circ}{A}\iff: x$ *„innerer Punkt" von A*

Bemerkung 1.3.1

a) $A\supset\overset{\circ}{A}\in\mathbb{O}$

b) $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{A\supset O\in\mathbb{O}} O$ $\Big($*$\overset{\circ}{A}$ ist die größte offene Menge in A.*$\Big)$

c) $(A=\overset{\circ}{A}\iff)\quad A\subset\overset{\circ}{A}\iff A\in\mathbb{O}$

d) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

e) $(A\cap B)^\circ = \overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}\qquad (A,B\subset\mathfrak{R})$

f) $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}\subset(A\cup B)^\circ$

Beweise:

a): nach (U1): $\overset{\circ}{A}\subset A$; für $x\in\overset{\circ}{A}$ gilt $A\in\mathbb{U}_x$; nach (U4) existiert $V\in\mathbb{U}_x$ mit $A\in\mathbb{U}_y$ für alle $y\in V$, also $V\subset\overset{\circ}{A}$, daher $\overset{\circ}{A}\in\mathbb{U}_x$, somit (man vergleiche 1.2.6) $\overset{\circ}{A}\in\mathbb{O}$.

b): $\subset$: nach a)

$\supset$: Für $A\supset O\in\mathbb{O}$ (nach (1.2.6)): $\forall\,x\in O\ A\in\mathbb{U}_x:\ O\subset\overset{\circ}{A}$

c): $\Longrightarrow$: nach a); $\Longleftarrow$: nach b)

d): nach a) und c)

e): $\subset$: ✓ $\supset$: $A\cap B\supset\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}\in\mathbb{O}\overset{\text{b)}}{\Longrightarrow}(A\cap B)^\circ\supset\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$

f): ✓ $\big[\mathfrak{R}=\mathbb{R}$ (mit üblicher Topologie), $A:=\mathbb{Q}, B:=\widetilde{A}$ zeigen, dass ℓ.S. $=\emptyset\wedge$ r.S. $=\mathfrak{R}$ möglich ist.$\big]$ □

Definition

$\mathbb{A} := \{F\,|\,F\subset\mathfrak{R}\wedge\widetilde{F}\in\mathbb{O}\}$ $\big($*‚Immer': $\mathbb{O}\longmapsto\mathbb{A}=:\mathbb{A}(\mathbb{O})$*$\big)$

Für $A\subset\mathfrak{R}$: $A\in\mathbb{A}\iff: A$ „abgeschlossen"

$\overline{A} := \{x\in\mathfrak{R}:\ \forall\,U\in\mathbb{U}_x\quad U\cap A\neq\emptyset\}$ $\big($*(abgeschlossene) „Hülle" von A*$\big)$

Für $x\in\mathfrak{R}$: $x\in\overline{A}\iff: x$ „Berührungspunkt" zu A

Die Eigenschaften offener Mengen ‚übersetzen' sich zu:

Bemerkung 1.3.2

(A1) $\mathbb{A}\supset\mathbb{A}_1\Longrightarrow\bigcap_{\mathbb{A}_1}F\in\mathbb{A}$ *(in Worten: □□□)*

(A2) $\mathbb{A}\supset\mathbb{A}_2$ *endlich* $\Longrightarrow\bigcup_{\mathbb{A}_2}F\in\mathbb{A}$ *(in Worten: □□□)*

(A1') $\mathfrak{R}\in\mathbb{A}$

(A2') $\emptyset\in\mathbb{A}$

Die folgende Bemerkung erlaubt es, (1.3.1) zu ‚übersetzen' *(„Dualität")*:

Bemerkung 1.3.3
$$\boxed{\overline{A} \;=\; \widetilde{\overset{\circ}{\widetilde{A}}} \qquad\qquad \Big(\overset{\circ}{A} \;=\; \widetilde{\overline{\widetilde{A}}}\Big)}$$

Beweis: zu zeigen: $\widetilde{\overline{A}} = \overset{\circ}{\widetilde{A}}$:

$x \in \ell.\mathrm{S.} \iff \exists\, U \in \mathbb{U}_x \;\; U \cap A = \emptyset \;\; \big(\text{also } U \subset \widetilde{A}\,\big)$

$\iff \widetilde{A} \in \mathbb{U}_x \iff x \in \mathrm{r.S.}$ □

Bemerkung 1.3.4

a) $A \subset \overline{A} \in \mathbb{A}$

b) $\overline{A} \;=\; \bigcap\limits_{A \subset F \in \mathbb{A}} F$ $\quad$ ($\overline{A}$ *ist die kleinste* A *umfassende abgeschlossene Menge.*)

c) $\big(A = \overline{A} \iff\big) \quad A \supset \overline{A} \iff A \in \mathbb{A}$

d) $\overline{\overline{A}} \;=\; \overline{A}$

e) $\overline{A \cup B} \;=\; \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (\ldots)$

f) $\overline{A \cap B} \;\subset\; \overline{A} \cap \overline{B}$

Beweis: ‚direkt' oder aus (1.3.1) mit (1.3.3) ablesen:

z. B. a): nach (1.3.1.a) $\widetilde{A} \supset \overset{\circ}{\widetilde{A}} \in \mathbb{O}$, also $A \subset \widetilde{\overset{\circ}{\widetilde{A}}} \in \mathbb{A}$, mit (1.3.3) folgt die Behauptung. □

Das gleiche Beispiel wie zu (1.3.1.f) zeigt, dass auch hier — in f) — nicht „=“ gezeigt werden kann.

1.4 Filter

In A I und A II konnten viele topologische Begriffe durch Folgenkonvergenz beschrieben werden. Dies ist entsprechend auch für semimetrische Räume möglich. Für allgemeine topologische Räume ist Folgenkonvergenz kein geeignetes Hilfsmittel. Hier ist (z. B.) der von H. Cartan eingeführte Filter-Begriff angemessen:

Es sei $\mathfrak{R}$ eine nichtleere Menge.

Bezeichnung

$\mathbb{P}'(\mathfrak{R}) \;:=\; \mathbb{P}(\mathfrak{R}) \setminus \{\emptyset\}$ $\quad$ (Menge der nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{R}$)

Definition

$$\mathbb{F} \text{ „\textit{Filter (auf } \mathfrak{R}\text{)}“} :\iff \begin{cases} \mathbb{F} \in \mathbb{P}'(\mathbb{P}'(\mathfrak{R})) & (d.\,h.\ \ldots) \\ \mathbb{F} \ni F \subset G \subset \mathfrak{R} \implies G \in \mathbb{F} \\ F, G \in \mathbb{F} \implies F \cap G \in \mathbb{F} \end{cases}$$

$$\mathbb{F}_0 \text{ „\textit{Filterbasis (auf } \mathfrak{R}\text{)}“ („\textit{FB}“)} :\iff \begin{cases} \mathbb{F}_0 \in \mathbb{P}'(\mathbb{P}'(\mathfrak{R})) \\ F, G \in \mathbb{F}_0 \implies \exists\, H \in \mathbb{F}_0 \;\; H \subset F \cap G \end{cases}$$

Für $\mathbb{H} \in \mathbb{P}'(\mathbb{P}'(\mathfrak{R}))$ bezeichnen wir mit

$$[\mathbb{H}] \;:=\; \big\{A \subset \mathfrak{R} \mid \exists\, H \in \mathbb{H} \quad H \subset A\big\} \quad (\supset \mathbb{H})$$

das System der Obermengen von Mengen aus $\mathbb{H}$.

Bemerkung 1.4.1 *Für* $\mathbb{H} \in \mathbb{P}'(\mathbb{P}'(\mathfrak{R}))$

$$\mathbb{H} \text{ \textit{Filterbasis}} \iff [\mathbb{H}] \text{ \textit{Filter}}$$

Beweis: □ □ □ □

Bezeichnung Falls $\mathbb{F}_0$ Filterbasis und $\mathbb{F} := [\mathbb{F}_0]$ (Filter):
$\mathbb{F}_0$ *„Filterbasis von* $\mathbb{F}$*“*, $\mathbb{F}$ *„von* $\mathbb{F}_0$ *erzeugter Filter“*.

$\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ Filterbasen auf $\mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_1 \;\leq\; \mathbb{F}_2 :&\iff [\mathbb{F}_1] \subset [\mathbb{F}_2] \\ &\overset{\checkmark}{\iff} \mathbb{F}_1 \subset [\mathbb{F}_2] \\ &\iff \forall\, F_1 \in \mathbb{F}_1 \quad \exists\, F_2 \in \mathbb{F}_2 \quad F_2 \subset F_1 \\ &\iff : \mathbb{F}_1 \text{ „\textit{gröber}“ als } \mathbb{F}_2 \iff : \mathbb{F}_2 \text{ „\textit{feiner}“ als } \mathbb{F}_1 \end{aligned}$$

Die Relation $\leq$ (zwischen Filterbasen auf $\mathfrak{R}$) ist *reflexiv* und *transitiv.*

Bemerkung 1.4.2 $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ *nichtleere Mengen;* $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$, $\mathbb{F}_0$ *FB auf* $\mathfrak{R}$:

$$f(\mathbb{F}_0) \;:=\; \big\{f(F) : F \in \mathbb{F}_0\big\} \quad \text{\textit{FB auf} } \mathfrak{S} \qquad (\text{„\textit{Bild von} } \mathbb{F}_0 \text{ \textit{unter} } f\text{“}).$$

Beweis: □ □ □ □

Beispiele

(B1) $\emptyset \neq A \subset \mathfrak{R};\ \mathbb{F}_0 = \{A\}$ $\quad$ (FB)

(B2) $\mathfrak{R}$ unendlich; $\mathbb{F} := \{A \mid A \subset \mathfrak{R} \wedge \widetilde{A} \text{ endlich}\}$ (Filter)

(B3) $\mathfrak{R} = \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ dazu gemäß (B2); dann gilt:

$$\mathbb{F} = \{A \mid A \subset \mathbb{N} \wedge \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq n \quad m \in A\}$$

(B4) $\mathfrak{S} \neq \emptyset$, $\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{S}$, $\mathbb{F}$ gemäß (B3)

$$\mathbb{F}(\alpha) := [\alpha(\mathbb{F})] = \{B \mid B \subset \mathfrak{S} \wedge \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq n \quad \alpha(m) \in B\}$$

(„Fréchet-Filter (der Folge α)“)

(B5) $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ TR $(\mathbb{O} \longmapsto \mathbb{U})$; für $x \in \mathfrak{R}$ ist $\mathbb{U}_x$ ein Filter $\big((U0) – (U3)\big)$ mit

$$\mathbb{O}_x := \{O \in \mathbb{O} : x \in O\} \quad \text{als FB.}$$

Ist $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *TR*, dann heißt jede Filterbasis von $\mathbb{U}_x$ eine *„Umgebungsbasis“* (auch: *‚lokale Basis‘*) $(x \in \mathfrak{R})$.

Z. B. bilden in einem SMR $(\mathfrak{R}, \delta)$ für $x \in \mathfrak{R}$

$$\{U_x^\varepsilon : \varepsilon > 0\}, \quad \{K_x^\varepsilon : \varepsilon > 0\} \quad \text{und} \quad \Big\{U_x^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\Big\}$$

Umgebungsbasen.

$\mathbb{B} \subset \mathbb{O}$ heißt „*Basis* (von $\mathbb{O}$)“ : $\iff \forall O \in \mathbb{O} \quad \exists \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B} \quad O = \bigcup_{\mathbb{B}_1} B$

$$\overset{\checkmark}{\iff} \forall O \in \mathbb{O}\, \forall x \in O\, \exists B \in \mathbb{B} \quad x \in B \subset O$$

$\mathbb{S} \subset \mathbb{O}$ „*Subbasis* (von $\mathbb{O}$)“ : $\iff \Big\{\bigcap_{\mathbb{S}_1} S : \mathbb{S} \supset \mathbb{S}_1 \text{ endlich}\Big\}$ Basis (von $\mathbb{O}$)

$\langle \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q} \wedge a \leq b\}$ bildet eine (abzählbare!) Basis der (üblichen) Topologie auf $\mathbb{R}$.$\rangle$

1.5 Stetigkeit und Konvergenz

Für einen TR $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$, $a \in \mathfrak{R}$ und $\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{R}$ definiert man in naturgemäßer Verallgemeinerung der Überlegungen aus A I, A II:

$$\alpha(n) \longrightarrow a \quad (\underbrace{n \longrightarrow \infty}_{\text{lassen wir meist wieder weg!}}) : \iff \forall U \in \mathbb{U}_a\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \geq n \;\; \alpha(m) \in U$$

Mit dem oben eingeführten Fréchet–Filter zu α bedeutet dies gerade:

$$\alpha(n) \longrightarrow a \iff \mathbb{U}_a \subset \mathbb{F}(\alpha)$$

Dies führt zur verallgemeinernden

Definition *Für eine FB $\mathbb{F}_0$ auf $\mathfrak{R}$*

$$\mathbb{F}_0 \longrightarrow a : \iff \mathbb{U}_a \leq \mathbb{F}_0 \iff \forall U \in \mathbb{U}_a\, \exists F \in \mathbb{F}_0 \;\; F \subset U$$

($\rightsquigarrow$ übliche Sprechweisen: a *„Grenzwert“*, *„$\mathbb{F}_0$ konvergiert gegen a“* usw.)

Achtung: Ein Grenzwert ist *nicht notwendig* eindeutig.

Bemerkung 1.5.1 *Für $A \subset \mathfrak{R}$:*

$$a \in \overline{A} \iff \exists \mathbb{F}_0 \text{ FB } \big[\mathbb{F}_0 \longrightarrow a \wedge \forall F \in \mathbb{F}_0 \quad F \subset A\big]$$

Beweis:

$\Longrightarrow$: $\forall U \in \mathbb{U}_a \quad U \cap A \neq \emptyset$:
$\mathbb{F}_0 := \mathbb{U}_a \underset{e}{\cap} A := \{U \cap A : U \in \mathbb{U}_a\}$ ist eine FB mit $[\ \ldots\ ]$

$\Longleftarrow$: r. S. $\Longrightarrow \forall U \in \mathbb{U}_a \quad \exists F \in \mathbb{F}_0 \quad F \subset U$, also
r. S. $\Longrightarrow \forall U \in \mathbb{U}_a \quad \exists F \in \mathbb{F}_0 \quad A \cap U \supset F \cap U = F \neq \emptyset$ □

In A II zeigt man in der Regel (im wesentlichen):

Bemerkung 1.5.2 *Ist $(\mathfrak{R}, \delta)$ SMR, dann gilt:*

$a \in \overline{A} \iff$ *Es existieren $x_k \in A$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $x_k \longrightarrow a$*

Es seien nun

$(\mathfrak{R}_\nu, \mathbb{O}_\nu)$ topologische Räume $\big(\mathbb{O}_\nu \longmapsto \mathbb{U}^\nu, \mathbb{A}_\nu, \ldots\big)$ $(\nu = 1, 2, 3)$,
$f\colon \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_2$, $a \in \mathfrak{R}_1$

Definition

$$f \text{ „\textit{in a stetig}“} : \iff \forall U \in \mathbb{U}^2_{f(a)}\, \exists V \in \mathbb{U}^1_a \; f(V) \subset U$$

$$\overset{\checkmark}{\iff} \mathbb{U}^2_{f(a)} \leq f(\mathbb{U}^1_a) \overset{\checkmark}{\iff} \forall U \in \mathbb{U}^2_{f(a)} \quad f^{-1}(U) \in \mathbb{U}^1_a$$

Bemerkung 1.5.3

Sind $\mathbb{B}^1_a$ bzw. $\mathbb{B}^2_{f(a)}$ Umgebungsbasen von $\mathbb{U}^1_a$ bzw. $\mathbb{U}^2_{f(a)}$, dann gilt:

$$f \text{ in } a \text{ stetig} \iff \mathbb{B}^2_{f(a)} \leq f(\mathbb{B}^1_a)$$

Beweis: □□□ $\square$

Folgerung 1.5.4 *Falls* $(\mathfrak{R}_\nu, \delta_\nu)$ *SMRe* $(\nu = 1,2)$: *f in a stetig* $\iff$
$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in \mathfrak{R}_1\;\; \delta_1(x,a) < \delta \implies \delta_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Bemerkung 1.5.5 *Vor.:* *f in a stetig,* $g\colon \mathfrak{R}_2 \longrightarrow \mathfrak{R}_3$ *in* $f(a)$ *stetig*

Beh.: $g \circ f\; (\colon \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_3)$ *in a stetig*

Bemerkung 1.5.6 *Vor.:* $A \subset \mathfrak{R}_1,\; p \in \overline{A},$ *f in p stetig*

Beh.: $f(p) \in \overline{f(A)}$

Beweis: Zu $U \in \mathbb{U}^2_{f(p)}$ existiert $V \in \mathbb{U}^1_p$ mit $f(V) \subset U$; $V \cap A \neq \emptyset$, da $p \in \overline{A}$, also: $\emptyset \neq f(V \cap A) \subset f(V) \cap f(A) \subset U \cap f(A)$, somit $f(p) \in \overline{f(A)}$ $\square$

Bemerkung 1.5.7

$$f \text{ in } a \text{ stetig} \iff \big[\mathbb{F}_0 \text{ FB auf } \mathfrak{R}_1 \;\wedge\; \mathbb{F}_0 \longrightarrow a \implies f(\mathbb{F}_0) \longrightarrow f(a)\big]$$

Beweis: $\implies$: $\mathbb{F}_0 \longrightarrow a \implies \mathbb{U}^1_a \le \mathbb{F}_0 \implies \mathbb{U}^2_{f(a)} \le f(\mathbb{U}^1_a) \le f(\mathbb{F}_0)$

$\Longleftarrow$: $\mathbb{U}^1_a \longrightarrow a \implies f(\mathbb{U}^1_a) \longrightarrow f(a) \implies \mathbb{U}^2_{f(a)} \le f(\mathbb{U}^1_a)$ $\square$

Bemerkung 1.5.8 * *Falls* $(\mathfrak{R}_1, \delta_1)$ *SMR:*

$$f \text{ in } a \text{ stetig} \iff \forall\, (x_n) \in \mathfrak{R}_1^{\mathbb{N}} \quad x_n \longrightarrow a \implies f(x_n) \longrightarrow f(a).$$

Beweis: □□□ $\square$

Definition *Für* $A \subset \mathfrak{R}_1$:

f *„in A stetig“* $:\iff \forall\, a \in A$ *f in a stetig*
f *„stetig“* $:\iff$ *f in* $\mathfrak{R}_1$ *stetig*

Bemerkung 1.5.9

Mit einer Subbasis $\mathbb{S}_2$ *von* $\mathbb{O}_2$ *sind äquivalent:*
a) f *stetig*
b) $\forall\, O \in \mathbb{O}_2 \quad f^{-1}(O) \in \mathbb{O}_1$
c) $\forall\, O \in \mathbb{S}_2 \quad f^{-1}(O) \in \mathbb{O}_1$
d) $\forall\, A \in \mathbb{A}_2 \quad f^{-1}(A) \in \mathbb{A}_1$
e) $A \subset \mathfrak{R}_1 \implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

* Für (1.5.8) genügt die schwächere Eigenschaft (B1), auf die wir hier nicht eingehen.

Beweis:

a) $\implies$ e): nach (1.5.6)

e) $\implies$ d): Zu $A \in \mathbb{A}_2$ sei $F := f^{-1}(A)$, dann $f(F) \subset A$, nach e): $f(\overline{F}) \subset \overline{f(F)} \subset \overline{A} \subset A$; somit $\overline{F} \subset f^{-1}(A) = F$

d) $\implies$ b): ✓

b) $\implies$ c): trivial

c) $\implies$ b): □□□

b) $\implies$ a): $x \in \mathfrak{R}_1$: Zu $U \in \mathbb{U}^2_{f(x)}$ existiert $O \in \mathbb{O}_2$ mit $f(x) \in O \subset U$, dann $x \in f^{-1}(O) \in \mathbb{O}_1$, also $f^{-1}(O) \in \mathbb{U}^1_x$ $\big($mit $f(f^{-1}(O)) \subset O \subset U\big)$. $\square$

Anmerkung Das *Bild* einer offenen (bzw. abgeschlossenen) Menge unter einer stetigen Abbildung muß *nicht* offen (...) sein:

1) $f(x) := x^2\; (x \in \mathbb{R}) : \quad f\big(]-1,1[\big) = [0,1[$

2) $f\colon]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ durch: $f(x) := \frac{1}{x} \quad \big(x \in]0,\infty[\big) : \quad f\big([1,\infty[\big) =]0,1]$

Vergleich von Topologien

Es seien $(\mathfrak{R}, \mathbb{O}_1)$ und $(\mathfrak{R}, \mathbb{O}_2)$ topologische Räume $\big(\mathbb{O}_\nu \longmapsto \mathbb{U}^\nu\big)$
$\mathbb{O}_1$ *„feiner“* als $\mathbb{O}_2$ $:\iff$ $\mathbb{O}_2$ *„gröber“* als $\mathbb{O}_1$ $:\iff$ $\mathbb{O}_2 \subset \mathbb{O}_1$

Bemerkung 1.5.10 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) $\mathbb{O}_1$ *feiner als* $\mathbb{O}_2$

b) $\forall\, x \in \mathfrak{R} \quad \mathbb{U}^1_x$ *feiner als* $\mathbb{U}^2_x$

c) $\forall\, A \in \mathbb{P}(\mathfrak{R}) \quad \overset{\circ}{A}{}^{(1)} \supset \overset{\circ}{A}{}^{(2)}$

d) $\forall\, A \in \mathbb{P}(\mathfrak{R}) \quad \overline{A}^{(1)} \subset \overline{A}^{(2)}$

e) $\mathrm{id}\colon (\mathfrak{R}, \mathbb{O}_1) \longrightarrow (\mathfrak{R}, \mathbb{O}_2)$ *stetig*

Beweis: a) $\implies$ b): ✓, b) $\implies$ c): ✓, c) $\implies$ d): nach (1.3.3),
d) $\implies$ e): nach (1.5.9), e) $\implies$ a): ✓ $\square$

Weitere Überlegungen topologischer Art stellen wir zurück und ergänzen sie bei Bedarf. Wir beginnen stattdessen mit ersten Aussagen über die zentralen Objekte dieser Vorlesung:

Kapitel 2

Normierte Vektorräume und lineare Abbildungen

2.1 Definition und Grundeigenschaften

Zur Erinnerung (man vergleiche Seite 1): Es sei ‚immer' $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Bemerkung 2.1.1

Vor.: *Es sei* $\big(X, \|\ \|\big)$ *ein HNVR über* $\mathbb{K}$.

Beh.: *a)* $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \;\le\; \|x \pm y\| \;\le\; \|x\| + \|y\|$

b) $\delta(x,y) \;:=\; \|x - y\| \quad (\dots) \quad \Longrightarrow \quad (X, \delta)$ *SMR*

c) $\big(X, \mathbb{O}(\delta)\big)$ *HdR* $\Longleftrightarrow$ δ *Metrik* $\Longleftrightarrow$ $\|\ \|$ *Norm*

d) *Die Vektorraum-Abbildungen*
$a\colon X \times X \ni (x,y) \longmapsto x + y \in X$ *und*
$s\colon \mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \longmapsto \alpha x \in X$ *sind stetig.*

e) $\|\ \|\colon X \longrightarrow [0, \infty[$ *ist gleichmäßig stetig.*

‚Immer' $\quad \|\ \| \longmapsto \delta \longmapsto \mathbb{O}(\delta) =: \mathbb{O}(\|\ \|)$
$X \times X$, $\mathbb{K} \times X$ mit Produkttopologie (Produkttopologie aus A IV bekannt!?)

Beweis: a), b): (1.1.1) und (1.1.2)

c): $(X, \mathbb{O}(\delta))$ HdR $\overset{(1.2.8)}{\Longleftrightarrow}$ δ Metrik $\overset{\checkmark}{\Longleftrightarrow}$ $\| \ \|$ Norm

d): $\|(x+y)-(a+b)\| \;=\; \|(x-a)+(y-b)\| \;\leq\; \|x-a\|+\|y-b\|$

$$\|\lambda x - \alpha a\| \;=\; \|(\lambda-\alpha)x + \alpha(x-a)\| \;\leq\; |\lambda-\alpha|\,\|x\| + |\alpha|\,\|x-a\|$$
$$\leq\; |\lambda-\alpha|\big(\|a\|+\|x-a\|\big) + |\alpha|\,\|x-a\|$$

e): nach a) □

Es seien $X=(X,a,s)$ ein $\mathbb{K}$-VR und $A,B \subset X$, $\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$:

$$\begin{aligned} A+B &:= \{a+b : a\in A, b\in B\}\\ A+x &:= A+\{x\}\\ x+A &:= \{x\}+A\\ \Lambda B &:= \{\lambda b : \lambda \in \Lambda, b \in B\}\\ \alpha B &:= \{\alpha\}B \end{aligned}$$

A „Teilraum" („Unterraum") $:\Longleftrightarrow$ $A \neq \emptyset$, $A+A\subset A$, $\mathbb{K}A\subset A$

(A ist dann mit den ‚induzierten' Abbildungen $a_{/}$ und $s_{/}$ wieder ein $\mathbb{K}$-VR.)

Bemerkung 2.1.2

Vor.: $\big(X,a,s,\| \ \|\big)$ *HNVR,* M *Teilraum von* X

Beh.: *a)* $\big(M, a_{/}, s_{/}, \| \ \|_{/}\big)$ *ist ein HNVR.*

b) $\mathbb{O}\big(\| \ \|_{/}\big) = \mathbb{O}\big(\| \ \|\big)_M$

(Die induzierte Halbnorm liefert gerade die Spurtopologie.)

c) $\overline{M}$ *ist ein Teilraum von* X.

‚Immer' wird M mit $a_{/}$, $s_{/}$ und $\| \ \|_{/}$ betrachtet.

Beweis: a): ✓ b): ✓

c): $\overline{M}+\overline{M} \;=\; a\big(\overline{M}\times\overline{M}\big) \;=\; a\big(\overline{M\times M}\big) \overset{a \text{ stetig}}{\subset} \overline{a(M\times M)} \subset \overline{M}$;

$$\mathbb{K}\,\overline{M} \;=\; s\big(\mathbb{K}\times\overline{M}\big) \;=\; s\big(\overline{\mathbb{K}}\times\overline{M}\big) \;=\; s\big(\overline{\mathbb{K}\times M}\big) \overset{s \text{ stetig}}{\subset} \overline{s(\mathbb{K}\times M)} \subset \overline{M}$$
□

Bemerkung 2.1.3

Vor.: $X=(\ldots)$ *sei ein HNVR über* $\mathbb{K}$.

Beh.: *α)* *Für* $a\in X$ *ist* $T_a\colon X\ni x\longmapsto x+a\in X$ *topologisch*.*

β) *Für* $\mathbb{K}\ni\lambda\neq 0$ *ist* $M_\lambda\colon X\ni x\longmapsto \lambda x\in X$ *topologisch.*

Beweis: α): T_a bijektiv mit $(T_a)^{-1} \;=\; T_{-a}$; T_b stetig für $b\in X$: ✓

β): M_λ bijektiv mit $(M_\lambda)^{-1} \;=\; M_{\lambda^{-1}}$; M_μ stetig für $\mu\in\mathbb{K}$: ✓ □

Definition

$X := \big(X, \| \ \|\big) := \big(X,a,s,\| \ \|\big)$ *„($\mathbb{K}$)-*BANACH*Raum" („BR" oder „(B)-Raum")* $:\Longleftrightarrow$ $\big(X,a,s,\| \ \|\big)$ *NVR über* $\mathbb{K}$ *und* $\big(X,\| \ \|\big)$ *vollständig*

Bemerkung 2.1.4 *Auf jedem* $\mathbb{K}$*-VR läßt sich eine Norm definieren.*

(Beweis als Übungsaufgabe)

2.2 Lineare Abbildungen (‚Operatoren')

Meist interessieren nicht die Normierten Vektorräume für sich allein, sondern die ‚passenden' verbindenden Abbildungen zwischen solchen Räumen:

Es seien $\big(E_j, \| \ \|_j\big)$ NVRe über $\mathbb{K}$ für $j=1,2,3$.

Bemerkung 2.2.1

Für eine lineare Abbildung $T\colon E_1\longrightarrow E_2$ *sind äquivalent:*
a) *T ist „beschränkt"* $\Big($*d. h.:* $\exists\,\alpha\in[0,\infty[\ \forall\,x\in E_1\ \|Tx\|_2\leq\alpha\|x\|_1\Big)$.
b) *T ist gleichmäßig stetig.*
c) *Es existiert ein* $a\in E_1$*, in dem T stetig ist.*
d) *T ist stetig in* 0.

Beweis: b) $\Longrightarrow$ c): trivial

a) $\Longrightarrow$ b): $\|Tx-Ty\|_2 \;=\; \|T(x-y)\|_2 \;\leq\; \alpha\|x-y\|_1 \quad (\ldots)$

* Eine Abbildung eines TR in einen TR heißt genau dann *topologisch,* wenn sie bijektiv und stetig ist und auch ihre Umkehrabbildung stetig ist

c) $\Longrightarrow$ d): Mit (2.1.3.α) aus $\|Tx - T0\|_2 = \|T(x+a) - Ta\|_2$

d) $\Longrightarrow$ a): $\big($Zu $\varepsilon = 1\big)$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\|Tx\|_2 \le 1$, falls $\|x\|_1 \le \delta$. Für $E_1 \ni y \neq 0$ und $x := \frac{\delta}{\|y\|_1} y$ ist $\|x\|_1 = \delta$, also $\frac{\delta}{\|y\|_1}\|Ty\|_2 = \|Tx\|_2 \le 1$, folglich $\|Ty\|_2 \le \frac{1}{\delta}\|y\|_1$ für $y \in E_1$. $\square$

Definition

$T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ (NVR-) „Isomorphismus“ $:\Longleftrightarrow$

T algebraischer Isomorphismus (T bijektiv, linear) und T, T^{-1} stetig

$T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ „Norm-Isomorphismus“ $:\Longleftrightarrow$

T algebraischer Isomorphismus und $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ für alle $x \in E_1$

E_1 und E_2 heißen genau dann „isomorph“ bzw. „norm-isomorph“, wenn ein Isomorphismus bzw. Norm-Isomorphismus $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ existiert.

Jeder Norm-Isomorphismus ist offenbar ein (NVR-) Isomorphismus.

Eine lineare Abbildung $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$, die *normerhaltend* ist $\big(\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ für alle $x \in E_1\big)$, ist eine *Isometrie,* d. h.

$$\forall\, u, v \in E_1 \;\; \delta_2(Tu, Tv) = \delta_1(u, v)\,.$$

Beweis:

$\delta_2(Tu, Tv) = \|Tu - Tv\|_2 = \|T(u-v)\|_2 = \|u-v\|_1 = \delta_1(u,v)$ $\square$

Folgerung 2.2.2 (zur Bemerkung (2.2.1))

Vor.: *$T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ linear*

Beh.: *T ist genau dann ein (NVR-) Isomorphismus, wenn T surjektiv ist und $0 < m \le M < \infty$ so existieren, dass*

$$m\,\|x\|_1 \le \|Tx\|_2 \le M\,\|x\|_1$$

für alle $x \in E_1$ gilt.

Beweis: (α) Die Abschätzung impliziert, dass T injektiv ist: T linear und:
$Tx = 0 \Longrightarrow \|Tx\|_2 = 0 \Longrightarrow \|x\|_1 = 0 \Longrightarrow x = 0$

(β) Nach (2.2.1) gilt:
T stetig $\Longleftrightarrow \exists\, 0 < M < \infty \;\forall\, x \in E_1 \;\|Tx\|_2 \le M\|x\|_1$

(γ) Für T bijektiv (nach (2.2.1)):
T^{-1} stetig $\Longleftrightarrow \exists\, 0 < m < \infty \;\forall\, y \in E_2 \;\big\|T^{-1}y\big\|_1 \le \frac{1}{m}\|y\|_2$
$\Longleftrightarrow \exists\, 0 < m < \infty \;\forall\, x \in E_1 \;m\|x\|_1 \le \|Tx\|_2$ $\square$

Folgerung 2.2.3 *Für $E := E_1 = E_2$ hat man:*

a) $\mathbb{O}(\|\;\|_1) \supset \mathbb{O}(\|\;\|_2) \Longleftrightarrow \exists\, \alpha \in\,]0,\infty[\;\forall\, x \in E \;\|x\|_2 \le \alpha\|x\|_1$

b) $\mathbb{O}(\|\;\|_1) = \mathbb{O}(\|\;\|_2)$
$\Longleftrightarrow \exists\, 0 < m \le M < \infty \;\forall\, x \in E \;m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1$
$\Longleftrightarrow:$ *$\|\;\|_1$ und $\|\;\|_2$ sind „äquivalent“.*

Beweis: b): nach a)

a): ℓ. S. $\overset{(1.5.10)}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{id}\colon \big(E, \|\;\|_1\big) \longrightarrow \big(E, \|\;\|_2\big)$ stetig $\overset{(2.2.1)}{\Longleftrightarrow}$ r. S. $\square$

Für eine lineare Abbildung $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ betrachten wir — mit $\infty \cdot 0 := 0$ — die „*Abbildungsnorm*“ oder „*Operatornorm*“ von T:

Definition $\|T\| := \inf\big\{\alpha \in [0,\infty] : \forall\, x \in E_1 \;\|Tx\|_2 \le \alpha\|x\|_1\big\}$

Mit $\sup\emptyset := 0$ gilt:

Bemerkung 2.2.4

$$\boxed{\begin{aligned} \|T\| &= \min\big\{\alpha \in [0,\infty] : \forall\, x \in E_1 \;\|Tx\|_2 \le \alpha\|x\|_1\big\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} : x \in E_1 \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\big\{\|Tx\|_2 : x \in E_1 \;\wedge\; \|x\|_1 \le 1\big\} \\ &= \sup\big\{\|Tx\|_2 : x \in E_1 \;\wedge\; \|x\|_1 = 1\big\} \\ &= \sup\big\{\|Tx\|_2 : x \in E_1 \;\wedge\; \|x\|_1 < 1\big\} \end{aligned}}$$

Beweis: 1. Gleichung: Œ $\|T\| < \infty$: Für $x \in E_1$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\|Tx\|_2 \le \Big(\|T\| + \frac{1}{n}\Big)\|x\|_1\,;$$

daraus (x fest): $\|Tx\|_2 \le \|T\|\,\|x\|_1$

Für $\alpha \in [0,\infty]$:

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in E_1 && \|Tx\|_2 \;\le\; \alpha\,\|x\|_1 \\ \iff &\forall\, x \in E_1 \setminus \{0\} && \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} \;\le\; \alpha \\ \iff & S_1 \;:=\; \sup\left\{\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} : E_1 \ni x \neq 0\right\} && \le\; \alpha\,; \end{aligned}$$

somit $S_1 = \|T\|$.

Die anderen Suprema seien (von oben nach unten) mit S_2, S_3 und S_4 bezeichnet. Wir zeigen $S_3 \overset{\checkmark}{\le} S_2 \overset{\alpha)}{\le} S_1 \overset{\beta)}{\le} S_3$, also $S_1 = S_2 = S_3$:

α): Für $0 < \|x\|_1 \le 1$: $\|Tx\|_2 \le \dfrac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} \le S_1$

β): Für $E_1 \ni x \neq 0$: $\dfrac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} = \left\|T\Big(\dfrac{1}{\|x\|_1}x\Big)\right\|_2 \le S_3$

$S_4 \le S_2$: ✓ $S_3 \le S_4$: Ist $x \in E_1$ mit $\|x\|_1 = 1$, dann ist $\|\alpha x\|_1 = \alpha < 1$ für $0 < \alpha < 1$, also $\alpha\|Tx\|_2 = \|T(\alpha x)\|_2 \le S_4$, daher $\alpha S_3 \le S_4$ ($\Longrightarrow$ Behauptung) □

Bezeichnung

$$\mathcal{L}(E_1, E_2) \;:=\; \big\{A \mid A\colon E_1 \longrightarrow E_2 \quad (\mathbb{K}-)\,\textit{linear}\big\}$$

Mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ ein $\mathbb{K}$-*VR*.

$$L(E_1, E_2) \;:=\; \big\{A \in \mathcal{L}(E_1, E_2) : A \text{ stetig}\big\} \overset{(2.2.1)}{=} \big\{A \in \mathcal{L}(E_1, E_2) : \|A\| < \infty\big\}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} E_1 &:= C_1^{\mathbb{R}}[0,1] \quad \big(:= \{f \mid f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}\}\big) \\ E_2 &:= C^{\mathbb{R}}[0,1] \quad \big(:= \{f \mid f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}\big)\,; \end{aligned}$$

beide versehen mit $\|\ \|_s$.

Für $f \in E_1$ sei $Df := f'$, dann ist $D\colon E_1 \longrightarrow E_2$ *linear* (✓) mit $\|D\| = \infty$:

□ □ □ ◁

Satz 2.2.5

a) $\big(L(E_1, E_2), \|\ \|\big)$ *ist ein NVR.*

b) *Ist* $\big(E_2, \|\ \|_2\big)$ *ein BR, so ist auch* $\big(L(E_1, E_2), \|\ \|\big)$ *ein BR.*

Wir betrachten ‚stets' $L(E_1, E_2)$ mit der Operatornorm.

Beweis:

a): Es seien $S, T \in L(E_1, E_2)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$: Für $x \in E_1$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|(\alpha S + T)x\|_2 &= \|\alpha Sx + Tx\|_2 \;\le\; |\alpha|\,\|Sx\|_2 + \|Tx\|_2 \\ &\overset{(2.2.4)}{\le} \big(|\alpha|\,\|S\| + \|T\|\big)\,\|x\|_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also} \quad \|\alpha S + T\| &\le |\alpha|\,\|S\| + \|T\|\,; \\ \text{speziell} \quad \|S + T\| &\le \|S\| + \|T\| \\ \text{und} \quad \|\alpha S\| &\le |\alpha|\,\|S\| \qquad (*) \end{aligned}$$

Für $\alpha \neq 0$: $\|S\| = \big\|\alpha^{-1}(\alpha S)\big\| \overset{(*)}{\le} \dfrac{1}{|\alpha|}\|\alpha S\|\,;$

daher $\|\alpha S\| = |\alpha|\,\|S\|$.

$$\|T\| = 0 \implies \forall\, x \in E_1\ \|Tx\|_2 = 0 \implies \forall\, x \in E_1\ Tx = 0\,, \text{ d.h. } T = 0$$

b): Ist (A_n) eine Cauchy-Folge (CF) in $L(E_1, E_2)$, dann ist für jedes $x \in E_1$ die Folge $(A_n x)$ eine CF in E_2 $\big($da $\|A_n x - A_m x\|_2 \le \|A_n - A_m\|\,\|x\|_1\big)$ mit eindeutigem Grenzwert $y_x \in E_2$. Wir setzen $Ax := y_x$. Für $x, y \in E_1$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ hat man

$$A(\alpha x + y) \longleftarrow A_n(\alpha x + y) \;=\; \alpha A_n x + A_n y \longrightarrow \alpha Ax + Ay,$$

also $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|A_n - A_m\| \le \varepsilon$ für $n, m \ge N$; es seien $n \ge N$ fest und $m \ge n$ beliebig; für $x \in E_1$ mit $\|x\|_1 \le 1$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|A_n x - Ax\|_2 &\le \|A_n x - A_m x\|_2 \;+\; \|A_m x - Ax\|_2 \\ &\le \|A_n - A_m\| \;+\; \|A_m x - Ax\|_2 \\ &\le \varepsilon + \|A_m x - Ax\|_2 \end{aligned}$$

$m \longrightarrow \infty$ zeigt: $\|A_n x - Ax\|_2 \le \varepsilon$, also $\|A_n - A\| \le \varepsilon$; aus $A_n - A \in L(E_1, E_2)$ folgt aber insbesondere auch $A \in L(E_1, E_2)$. □

Bezeichnung Ist $(E,\|\ \|)$ ein NVR über $\mathbb{K}$, dann seien

$E^* := \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ der *„algebraische Dualraum“* zu E und
$E' := L(E,\mathbb{K})$ der (‚topologische‘ oder ‚stetige‘) *„Dualraum“* zu E.
Elemente aus E^* heißen *„lineare Funktionale“* oder *„Linearformen“* (auf E),
Elemente aus E' *„stetige lineare Funktionale“* oder *„stetige Linearformen“* (auf E).

Folgerung 2.2.6 $(E,\|\ \|)$ *NVR* $\Longrightarrow$ E' *BR*

Bemerkung 2.2.7

Vor.: $T \in L(E_1,E_2) \ \wedge\ S \in L(E_2,E_3)$

Beh.: $S \circ T =: ST \in L(E_1,E_3)$ *und* $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$

Beweis: Für $x \in E_1$: $\|STx\|_3 \le \|S\|\,\|Tx\|_2 \le \|S\|\,\|T\|\,\|x\|_1$, also
$\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$ (und somit $ST \in L(E_1,E_3)$) $\square$

Beispiel

$E_j := \mathbb{R}^2$ (mit (z. B.) $\|\ \|_\infty$) $(j = 1,2,3)$
$S \longleftrightarrow \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $T \longleftrightarrow \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$; dann $ST = 0$ und $(\square\square\square)$
$\|S\| = 1 = \|T\|$, also $\|ST\| = 0 < 1 = \|S\|\,\|T\|$

Definition

$A := (A,\|\ \|) := (A,a,s,m,e,\|\ \|)$ *„Normierte $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins“* $:\Longleftrightarrow$
$(A,a,s,\|\ \|)$ *NVR über* $\mathbb{K}$ *und* $m\colon A \times A \ni (a,b) \longmapsto ab \in A$ *assoziativ,*
$e \in A$ *mit* $ex = xe = x$, $(x+y)z = xz + yz$, $z(x+y) = zx + zy$,
$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, $\|xy\| \le \|x\|\,\|y\|$ $(\ldots)$*

Definition

$A := (A,a,s,m,e,\|\ \|)$ *„*BANACH*-Algebra“ (über $\mathbb{K}$, mit Eins e),* kurz auch *„(B)-Algebra“,*
$:\Longleftrightarrow$ *A Normierte $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins e und $(A,\|\ \|)$ vollständig*

* Wir fordern *nicht* $\|e\| = 1$!

Satz 2.2.8

Vor.: $(E,a,s,\|\ \|)$ *NVR über* $\mathbb{K}$

Beh.: a) $(L(E,E),a,s,\circ,\mathrm{id}_E,\|\ \|)$ *ist eine Normierte $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins* id_E *(und* $\|\mathrm{id}_E\| = 1$*).*

b) *E BR* $\Longrightarrow$ $(L(E,E),a,s,\circ,\mathrm{id}_E,\|\ \|)$ *ist eine (B)-Algebra.*

Beweis: a): mit (2.2.5.a) und (2.2.7) b): mit a) und (2.2.5.b) $\square$

Bemerkung 2.2.9

Ist $A = (A,a,s,m,e,\|\ \|)$ *eine normierte $\mathbb{K}$-Algebra (mit Eins), dann ist* $m\colon A \times A \longrightarrow A$ *stetig.*

Beweis:

$\|xy - cd\| = \big\|x(y-d) + (x-c)d\big\| \le \|x\|\,\|y-d\| + \|x-c\|\,\|d\| \longrightarrow 0$
für $x \longrightarrow c$ und $y \longrightarrow d$ $\square$

Drei Abschnitte mit Routine-Überlegungen, die man schon hier behandeln könnte — *Reihen in Normierten Vektorräumen*, *Endlichdimensionale Normierte Vektorräume* und *Quotienten- und Produkträume* — stelle ich etwas zurück, damit wir schneller zu spannenderen Themen kommen:

2.3 ‚Der‘ Satz von Hahn-Banach

Eines der bemerkenswertesten und bedeutendsten Resultate der FA — sowohl vom theoretischen als auch vom angewandten Standpunkt aus — ist ‚der‘ Satz von HAHN-BANACH. Er sichert unter anderem die Existenz hinreichend vieler Elemente von E' für (zum Beispiel) einen NVR E und ermöglicht damit eine ‚vernünftige‘ Dualitätstheorie.

Satz 2.3.1 (HAHN-BANACH)

Vor.: E *VR über* $\mathbb{R}$, M *Teilraum von* E

$$p\colon E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit}^{*} \quad p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad (x, y \in E)$$
$$p(\alpha x) = \alpha\, p(x) \quad (0 < \alpha \in \mathbb{R}, x \in E)$$

$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ *linear mit* $fz \le p(z) \quad (z \in M)$

Beh.: Es existiert eine Fortsetzung $F \in E^*$ *von* f *mit*

$$-p(-x) \;\le\; Fx \;\le\; p(x) \;\text{ für } x \in E\,.$$

Beweis: Wir betrachten das folgende System von Fortsetzungen von f:

$$\mathfrak{Z} \;:=\; \left\{ (D,h) : \begin{array}{l} M \subset D \text{ Teilraum von } E, \\ h\colon D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear,} \end{array} \quad h_{/M} = f,\ hz \;\le\; p(z) \;\; (z \in D) \right\}$$

Für zwei Paare (D_1, h_1) und (D_2, h_2) aus $\mathfrak{Z}$ sei:

$$(D_1, h_1) \;\le\; (D_2, h_2) : \Longleftrightarrow\; D_1 \subset D_2 \;\wedge\; h_{2/D_1} \;=\; h_1$$

1. $(\mathfrak{Z}, \le)$ *ist eine halbgeordnete Menge.*
2. $(M, f) \in \mathfrak{Z}$
3. Ist $\mathfrak{K}$ eine nichtleere Kette in $(\mathfrak{Z}, \le)$, so ist $K := \bigcup_{(D,h)\in\mathfrak{K}} D$ ein M umfassender Teilraum von E; durch $kz := hz$, falls $(D,h) \in \mathfrak{K}$ mit $z \in D$ (Rechtfertigung: □□□), ist eine lineare Abbildung $k\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $k_{/M} = f$ und $kz \le p(z)$ für $z \in K$ definiert, also $(K,k) \in \mathfrak{Z}$. Offenbar ist (K,k) eine *obere Schranke* zu $\mathfrak{K}$. Nach dem Lemma von ZORN existiert ein *maximales Element* (E_0, F) von $(\mathfrak{Z}, \le)$. Für $x \in E_0$ ist $F(-x) \le p(-x)$, also $-p(-x) \le -F(-x) = Fx$.

   Daher ist nur noch *zu zeigen:* $E = E_0$:

   Annahme: Es existiert ein $y \in E \setminus E_0$; dann ist $H := \{x + \alpha y : x \in E_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ ein *Teilraum von* E *mit* $E_0 \subsetneq H$. Mit festem $\gamma \in \mathbb{R}$ sei: $g(x + \alpha y) := Fx + \alpha\gamma$ (für $x \in E_0, \alpha \in \mathbb{R}$) ($g$ ist wohldefiniert: □□□); dann ist offenbar $g\colon H \longrightarrow \mathbb{R}$ linear mit $g_{/E_0} = F$. *Noch zu zeigen:*

   $\gamma \in \mathbb{R}$ kann *so gewählt werden, daß* $gz \le p(z)$ $(*)$ für $z \in H$ *gilt.*

   Dann hat man einen *Widerspruch* zur Maximalität von (E_0, F).

$$(*) \iff \forall\, x \in E_0\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad Fx + \alpha\gamma \;\le\; p(x + \alpha y)$$

* 1. Eigenschaft: *„subadditiv"*, 2. Eigenschaft: *„positiv homogen"*

$\alpha = 0$: ✓

$\alpha > 0$: Bedingung $\iff \forall\, x \in E_0 \quad \gamma \;\le\; p(\frac{x}{\alpha} + y) - F(\frac{x}{\alpha})$

$\alpha < 0$: Bedingung $\iff \forall\, x \in E_0 \quad F(\frac{x}{-\alpha}) - \gamma \le p(\frac{x}{-\alpha} - y)$

$\iff \forall\, x \in E_0 \quad F(-\frac{x}{\alpha}) - p(-\frac{x}{\alpha} - y) \le \gamma$

Für $u, v \in E_0$ gilt aber $Fu + Fv = F(u+v) \le p(u+v) \le p(u-y) + p(v+y)$, also

$$Fu - p(u-y) \;\le\; -Fv + p(v+y)\,;$$

daher $\quad a := \sup\{\ell.\ S. : u \in E_0\} \;\le\; b := \inf\{r.\ S. : v \in E_0\}$.

Für ein $a \le \gamma \le b$ gilt dann $(*)$. □

Neben der ‚transfiniten' Schlußweise ist der entscheidende Schritt die Fortsetzung um *eine* Dimension gewesen.

Satz 2.3.2 (HAHN-BANACH-BOHNENBLUST-SOBCZYK-SUHOMLINOV)*

Vor.: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, E *VR über* $\mathbb{K}$, M *Teilraum von* E, p *Halbnorm auf* E,
$f\colon M \longrightarrow \mathbb{K}$ *linear mit* $|fz| \le p(z)$ *für* $z \in M$

Beh.: Es existiert eine Fortsetzung $F \in E^*$ *von* f *mit* $|Fx| \le p(x)$ *für alle* $x \in E$.

Beweis:

1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: nach (2.3.1) unter Beachtung von
$-Fx \;=\; F(-x) \;\le\; p(-x) \;=\; p(x) \quad$ für $x \in E$.

2. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Ist E ein $\mathbb{C}$-VR, dann ist E (mit eingeschränkter Skalar-Multiplikation) insbesondere auch ein $\mathbb{R}$-VR (und M ein $\mathbb{R}$-Unterraum davon, p ($\mathbb{R}$-)Halbnorm auf E). Wir betrachten $gz := \mathfrak{Re}(fz)$ für $z \in M$; dann gelten

(i) $g\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$-linear.

(ii) $fz \;=\; gz - ig(iz) \;\; (z \in M) \quad$ (□□□),

(iii) $|gz| \;=\; |\mathfrak{Re}(fz)| \;\le\; |fz| \;\le\; p(z) \;\; (z \in M)$.

Nach dem 1. Fall existiert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $G\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, die Fortsetzung von g ist mit $|Gx| \le p(x)$ für $x \in E$. Wir betrachten $Fx := Gx - iG(ix)$ für $x \in E$. Nach (ii) gilt $F_{/M} = f$.

$F\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear:

(Es genügt offenbar der Nachweis von $F(ix) = iF(x)$ für $x \in E$.) (□□□)

Zu $x \in E$ existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ so, daß $\alpha Fx = |Fx|$; damit $|Fx| = F(\alpha x) \overset{\checkmark}{=} G(\alpha x) \le p(\alpha x) = p(x)$. □

* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: HAHN-BANACH, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: BOHNENBLUST-SOBCZYK-SUHOMLINOV

Folgerung 2.3.3

Vor.: $(E, \| \ \|)$ *NVR über* $\mathbb{K}$, M *Teilraum von* E, $f \in M'$

Beh.: Es existiert eine Fortsetzung $F \in E'$ *von* f *mit* $\|F\| = \|f\|$.

Beweis: In (2.3.2) setzen wir für $x \in E$: $p(x) := \|f\|\,\|x\|$: $|Fx| \le p(x)$ zeigt $\|F\| \le \|f\|$. (Da F Fortsetzung von f ist, gilt trivialerweise:) $\|F\| \ge \|f\|$ □

Folgerung 2.3.4

Vor.: $(E, \| \ \|)$ *NVR über* $\mathbb{K}$, $x_0 \in E$, M *Teilraum von* E, $d := d(x_0, M) > 0$ *

Beh.: Es existiert ein $g \in E'$ *mit* $\|g\| = 1$, $g_{/M} = 0$ *und* $g(x_0) = d$.

Anmerkung: Ist (unter den Voraussetzungen zu (2.3.4)) $g \in E'$ mit $\|g\| = 1$ und $g_{/M} = 0$, dann gilt

$$|g(x_0)| \ \le \ d\,;$$

denn für $y \in M$

$$|g(x_0)| \ = \ |g(x_0 - y)| \ \le \ \|x_0 - y\|\,.$$

Beweis zu (2.3.4): Wir betrachten den Teilraum von E:

$$H \ := \ \big\{x + \alpha x_0 : x \in M, \alpha \in \mathbb{K}\big\}$$

Für $x \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ sei $f(x + \alpha x_0) := \alpha d$: Dann ist $f\colon H \longrightarrow \mathbb{K}$ linear (✓) mit $f_{/M} = 0$, $f(x_0) = d$ und

$$\begin{aligned} \|f\| \ &= \ \sup\left\{ \frac{|\alpha|\, d}{\|x + \alpha x_0\|} : x \in M, \alpha \in \mathbb{K} \text{ mit } x + \alpha x_0 \ne 0 \right\} \\ &\overset{\checkmark}{\le} \ \sup\left\{ \frac{d}{\|-y + x_0\|} : y \in M \right\} = 1 \end{aligned}$$

Mit (2.3.3) hat man dann die Behauptung. □

Folgerung 2.3.5

Vor.: E $\mathbb{K}$-*VR;* $x_0 \in E$

Beh.: a) Ist p *eine Halbnorm auf* E, *so existiert ein* $F \in E^*$ *mit* $Fx_0 = p(x_0)$ *und* $|Fx| \le p(x)$ *für alle* $x \in E$.

b) $E \ne \{0\}$, $\| \ \|$ *Norm auf* $E \Longrightarrow \exists\, F \in E'$ *mit* $Fx_0 = \|x_0\| \wedge \|F\| = 1$

* $d(x_0, M) > 0$ bedeutet bekannterweise gerade: $x_0 \notin \overline{M}$

Beweis:

a): In (2.3.2) setzen wir: $M := \langle x_0 \rangle$ $\big(= \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}\big)$ und $f(\alpha x_0) := \alpha\, p(x_0)$ □□□

b): α) $x_0 \ne 0$: In (2.3.4): $M := \{0\}$ (oder in a) $p := \| \ \|$)
β) $x_0 = 0$: Wähle $z_0 \in E \setminus \{0\}$ und dazu F gemäß α). □

Folgerung 2.3.6

Vor.: $(E, \| \ \|)$ *NVR über* $\mathbb{K}$; $n \in \mathbb{N}$
$E \ni x_1, \ldots, x_n$ *linear unabhängig;* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

Beh.: Es existiert ein $g \in E'$ *mit* $g(x_\nu) = \alpha_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$.

Beweis: In (2.3.3): Zu $M := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ existiert eindeutig ein $f \in M^*$ mit $f(x_\nu) = \alpha_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$.; nach (4.3.3)*: $f \in M'$ □

Anwendungsbeispiel: *(Verallgemeinerter Grenzwert,* BANACH*-Limes)*

$E := \ell_\infty(\mathbb{R})$ $\big($mit $\| \ \|_\infty\big)$

Es existiert eine lineare Abbildung $\mathrm{LIM}\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ derart, daß

$$\liminf x_n \le \mathrm{LIM}\, x \le \limsup x_n$$

für alle $x = (x_n) \in E$ gilt. Insbesondere folgt also $\lim x_n = \mathrm{LIM}\, x$, *falls* (x_n) *konvergent ist.*

Beweis: $p(x) := \limsup x_n$ (für $x = (x_n) \in E$): p ist subadditiv und positiv homogen. $M := \{0\}, f := 0$. Nach (2.3.1) existiert $g \in E^*$ mit $gx \le p(x)$ für $x \in E$. Dann ist für $x = (x_n) \in E$ auch

$$-gx \ = \ g(-x) \ \le \ \limsup(-x_n) \ = \ -\liminf x_n, \text{ also } \liminf x_n \ \le \ gx\,.$$ □

Noch erreichbar: Für $(x_n) \in E$ gilt $\mathrm{LIM}((x_n)) = \mathrm{LIM}((x_{n+1}))$ (siehe z. B. BERBERIAN)

* Das zeigen wir noch.

© Dieter Hoffmann (Konstanz) — Stand der Dinge: 2. Dezember 2007, 16:30 Uhr

2.4 Bidualraum, Reflexivität, Vervollständigung

Es sei $\big(E, \|\ \|\big)$ ein NVR über $\mathbb{K}$.
Nach (2.2.6) sind E' und $E'' := (E')'$ $\mathbb{K}$-BRe; E'' wird als *„Bidualraum“* bezeichnet.

Bezeichnung Für $x \in E$ sei

$\varkappa x \colon E' \ni x' \longmapsto x'x \in \mathbb{K}$.

Zunächst ist $\varkappa x \colon E' \longrightarrow \mathbb{K}$ linear. $|(\varkappa x)x'| = |x'x| \le \|x'\|\,\|x\|$ zeigt $\|\varkappa x\| \le \|x\|$. Mit (2.3.5.b) dann $\|\varkappa x\| = \|x\|$. Damit (✓):

Bemerkung 2.4.1

$\varkappa \colon E \longrightarrow E''$ ist linear mit $\|\varkappa x\| = \|x\|$ für $x \in E$.
Somit ist $\varkappa \colon E \longrightarrow \varkappa(E)$ ein Norm-Isomorphismus.

Bezeichnung $\varkappa$ heißt *„kanonische Einbettung“* (von E in E'').

Jeder MR — insbesondere also jeder NVR — läßt sich ‚vervollständigen‘. Für einen NVR möchte man natürlich auf der ‚Vervollständigung‘ auch wieder eine *Vektorraumstruktur* und eine *Norm* derart haben, daß die Vervollständigung NVR — also BR — wird (und die Norm die gegebene Metrik liefert). Dies läßt sich — ausgehend von der allgemeinen Vervollständigung (eines MRs) — kanonisch ohne Schwierigkeiten machen. Ganz einfach — aber unter Benutzung des (nichttrivialen) ‚Geschützes‘ „Hahn-Banach“ — geht das wie folgt:

Bemerkung 2.4.2

$\overline{\varkappa E}$ ist ein BR. (eine *Vervollständigung* von E) ⟨Abschluß in E''⟩

Beweis: Nach (2.1.2.c) ist $\overline{\varkappa E}$ ein UR von E''; dieser ist vollständig, da ja der Raum E'' (als Dualraum) vollständig ist. □

Bezeichnung E *„reflexiv“*: $\iff$ $\varkappa E = E''$

Anmerkung: Die Existenz eines (beliebigen) Norm-Isomorphismus $\tau \colon E \longrightarrow E''$ ist *nicht* hinreichend für die Reflexivität von E: R. C. James; z. B. in Day p 72

Bemerkung 2.4.3 *Ist E endlichdimensional, dann ist E reflexiv.*

Beweis: Ist $\dim E =: n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt nach den noch ausstehenden Überlegungen zu endlichdimensionalen Räumen $E' = E^*$, also (Lineare Algebra) $\dim E' = n$; somit gilt auch $\dim E'' = n$ (und $\dim \varkappa E = n$): Zusammen hat man: $\varkappa E = E''$. □

Kapitel 3

Hilberträume

Hilberträume sind Banachräume mit einer besonders reichhaltigen Struktur. Ihre Norm ist durch ein Skalarprodukt gegeben und besitzt so weitaus mehr Eigenschaften als allgemeine Normen. Es lassen sich Winkel, speziell Orthogonalität, definieren. Hilberträume spielen eine zentrale Rolle in der mathematischen Beschreibung der Quantenmechanik. Typische Beispiele sind der Hilbert*sche Folgenraum* und viele *Funktionenräume.*

3.1 Definition und Grundeigenschaften

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und H ein $\mathbb{K}$-VR.

Bezeichnung

$$\langle\ ,\ \rangle \colon \begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \cup & & \cup \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle \end{array}$$

heißt *„Semiskalarprodukt“* (auf H) genau dann, wenn $\big($für alle $x,y,z \in H$:$\big)$

$\langle\,\cdot\,, z\rangle$ linear $\big($also $\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ $(\dots)\big)$
$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ und
$\langle x,x\rangle \in [0,\infty[$ gelten.

Ein Semiskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ heißt *„Skalarprodukt“* genau dann, wenn statt der letzten Eigenschaft sogar $\langle x,x\rangle \in\ ]0,\infty[$ für $x \ne 0$ gilt.

Im folgenden sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein *Semiskalarprodukt* auf H.

Trivialität 3.1.0 $\langle z, \alpha x + y\rangle = \overline{\alpha}\langle z,x\rangle + \langle z,y\rangle$ $(\dots)$

Bezeichnung $H \ni x, y$ *„orthogonal“* $:\iff x \perp y :\iff \langle x, y\rangle = 0$,

$\|z\| := \langle z, z\rangle^{1/2} \quad (z \in H)$,

für eine nichtleere Menge I und $x_i \in H$ für $i \in I$:

$(x_i)_I$ *„orthonormal“ („Orthonormalsystem“, „ONS“)*

$:\iff \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in I)$

Bemerkung 3.1.1

Vor.: I nichtleere Menge;
$(x_i)_I$ ONS; $y \in H$; $I \supset J$ endlich, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(i \in J)$

Beh.: a) $\left\|y - \sum_J \alpha_i x_i\right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_J |\langle y, x_i\rangle|^2 + \sum_J \left|\alpha_i - \langle y, x_i\rangle\right|^2$

b) $\ell.S.$ (strikt) minimal $\iff \alpha_i = \langle y, x_i\rangle \quad (i \in J)$

c) $\left\|y - \sum_J \langle y, x_i\rangle x_i\right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_J \left|\langle y, x_i\rangle\right|^2$

d) $\left\|\sum_J \alpha_i x_i\right\|^2 = \sum_J |\alpha_i|^2$

Beweis: a) $\overset{\checkmark}{\Longrightarrow}$ b), c), d)

a) $\ell.S. = \|y\|^2 - \sum_J \alpha_i \langle x_i, y\rangle - \sum_J \overline{\alpha_i} \langle y, x_i\rangle + \sum_J |\alpha_i|^2 \overset{\checkmark}{=} r.S.$ □

Folgerung 3.1.2

Vor.: I nichtleere Menge; $(x_i)_I$ ONS; $y \in H$

Beh.: a) $\sum_I |\langle y, x_i\rangle|^2 \le \|y\|^2$ (Bessel-Ungleichung)

b) $\{i \in I : \langle y, x_i\rangle \neq 0\}$ *ist abzählbar.*

Dabei ist $\sum_I \alpha_i := \sup\left\{\sum_J \alpha_i : I \supset J \text{ endlich}\right\}$ für $\alpha_i \in [0, \infty[$ gesetzt.

Beweis: a): nach (3.1.1.c)

b): nach a) ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\left\{i \in I : |\langle y, x_i\rangle| \ge \frac{1}{n}\right\}$ endlich

($\Longrightarrow$ Behauptung) □

Bemerkung 3.1.3

Für $x, y \in H$:

a) $\left|\langle x, y\rangle\right| \le \|x\|\,\|y\|$ (Schwarz-**Ungleichung**)

b) $\|\ \| : H \longrightarrow [0, \infty[$ *ist eine Halbnorm.*

b') $\|\ \|$ ist genau dann eine Norm, wenn $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

(**„Parallelogrammgleichung“**)

d) $4 \cdot \langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$, *falls* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$4 \cdot \langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{3} i^n \|x + i^n y\|^2$, *falls* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(**„Polarisierungsformeln“**)

Beweis:

a): Falls $\|x\| = \|y\| = 0$: Mit $\alpha := \langle x, y\rangle$:

$$0 \le \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2 = -2|\langle x, y\rangle|^2$$

Sonst: Œ $\|x\| > 0$; in (3.1.2 a) $I := \{1\}$ und $x_1 := \frac{1}{\|x\|}x$ betrachten

b): $\|x\| \ge 0$ und $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ für $\alpha \in \mathbb{K}$: ✓

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle \overset{\checkmark}{\le} \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \overset{a)}{\le} \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

b'): ✓

c): □□□ *Bildchen!*

d): *Übungsaufgabe!*

Ist $\left(X, \|\ \|\right)$ ein komplexer NVR, der die Parallelogrammgleichung erfüllt, so wird durch die (zweite) Polarisierungsformel ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ definiert, dessen induzierte Norm gerade $\|\ \|$ ist.) *Übungsaufgabe!*

Bemerkung 3.1.4 $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ *ist stetig.*

Beweis: Aus (3.1.3 a) oder aus (3.1.3 d) (mit der Stetigkeit von $\|\ \|$) ablesen. □

Bezeichnung

$(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *„Prä-HILBERTraum"* : $\Longleftrightarrow$ H $\mathbb{K}$-VR und $\langle\ ,\ \rangle$ Skalarprodukt auf H

$(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *„HILBERTraum" („(H)-Raum", „HR")* : $\Longleftrightarrow$
$(H, \langle\ ,\ \rangle)$ Prä-HILBERTraum und $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ vollständig (also BR).*

Beispiele

(B1) $n \in \mathbb{N}$; für $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\langle x, y \rangle \;:=\; \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \, \overline{y_\nu}$$

Speziell für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n = 3$ also das ‚übliche' Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$.

(B2) $-\infty < a < b < \infty$; für $f, g \in \mathrm{C}^{\mathbb{K}}[a, b]$:

$$\langle f, g \rangle \;:=\; \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

(B3) Für $x, y \in \ell_2$: $\qquad \langle x, y \rangle \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, \overline{y_n}$

In (B1), (B3) hat man HRe; (B2) ist ein Beispiel für einen Prä-HR, der nicht HR ist. Würde man in (B2) statt $\mathrm{C}^{\mathbb{K}}[a, b]$ die Menge der ($\mathbb{K}$-wertigen) RIEMANN-integrierbaren Funktionen zugrundelegen, so erhielte man ein Semiskalarprodukt, das nicht Skalarprodukt ist.

Vervollständigung

Ein Prä-HILBERTraum $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ läßt sich (z. B. nach (2.4.2)) als $\mathbb{K}$-NVR vervollständigen; die Vervollständigung ist dann in natürlicher Weise ($\langle\ ,\ \rangle$ stetig fortsetzen!) HILBERTraum.

3.2 Approximation und Orthogonalität

Bezeichnung Unter der Voraussetzung

$$(E, \|\ \|) \ \mathbb{K}\text{-NVR}, \quad \emptyset \neq U \subset E, \quad f \in E$$

* d. h. $(H, \|\ \|)$ ist vollständig (mit der zu $\langle\ ,\ \rangle$ gebildeten Norm $\|\ \|$) .

heißt ein $g \in U$ mit

$$\|f - g\| \;=\; d(f, U)$$

„Proximum", *„Minimallösung"* oder *„Element bester Approximation"* zu f bezüglich U.

Die allgemeine Fragestellung wird in der *Approximationstheorie* untersucht; im HR-Fall erhält man recht einfach dazu den

Satz 3.2.1

Vor.: $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *HR;* $H \supset F$ *abgeschlossen, konvex,* $\neq \emptyset$

Beh.: $\forall\, x \in H \quad \dot{\exists}\, y_x \in F \quad \|x - y_x\| \;=\; d(x, F)$

Anmerkung Die beiden nachfolgenden Bildchen verdeutlichen, dass die Forderungen der *Abgeschlossenheit* und *Konvexität* an F nicht ersatzlos gestrichen werden können. Links ist die Menge F konvex, aber nicht abgeschlossen, rechts abgeschlossen, aber nicht konvex.

Wir zeigen zum Beweis zunächst einen kleinen **Hilfssatz**

Vor.: $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *Prä-HILBERTraum;* $H \supset F \neq \emptyset$ *‚mittelpunktkonvex',*
d. h. $x, y \in F \Longrightarrow \frac{1}{2}(x + y) \in F$
$x \in H$, $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ *mit* $\|x - y_n\| \longrightarrow d(x, F)$

Beh.: (y_n) *ist eine CF.*

Beweis: Für $v, w \in F$ hat man nach der Parallelogrammgleichung

$$2\big(\|v - x\|^2 + \|x - w\|^2\big) \;=\; \|v - w\|^2 + \|v + w - 2x\|^2,$$

also $\qquad \|v - w\|^2 \;=\; \ell.S. \;-\; 4\Big\|\underbrace{\tfrac{1}{2}(v + w)}_{\in F} - x\Big\|^2 \;\leq\; \ell.S. \;-\; 4d^2 \qquad$ ①

mit $d := d(x, F)$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt somit

$$\|y_n - y_m\|^2 \;\leq 2\big(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2\big) - 4d^2 \longrightarrow 0 \qquad (n, m \longrightarrow \infty). \qquad \square$$

Beweis des Satzes: Zu einem festen $x \in H$ existiert eine Folge $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ so, dass $\|x - y_n\| \longrightarrow d := d(x,F)$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt. Nach dem Hilfssatz ist (y_n) eine CF in F, die einen Grenzwert $y \in F$ hat (H ist ein HR, F ist abgeschlossen). Die Stetigkeit der Norm liefert $d = \|x - y\|$. Die Eindeutigkeit liest man aus ① ab. $\square$

Bezeichnung Für $A, B \subset H$ und $x, y \in H$:

$A \perp B \;:\Longleftrightarrow\; A, B$ *„orthogonal"* $:\Longleftrightarrow\; \forall\, a \in A\ \forall\, b \in B\ \ a \perp b\,,$

$A \perp y :\Longleftrightarrow\; A \perp \{y\}\,,$

$x \perp B :\Longleftrightarrow\; \{x\} \perp B\,,$

$A^\perp \;:=\; \{z \in H : z \perp A\}$ *„Orthogonalraum zu A"*

Satz 3.2.2

Vor.: $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *Prä-HR,* U *Unterraum von* H*,* $f \in H$*;* $\widehat{g} \in U$

Beh.: $\widehat{g}$ *Proximum zu* f *bezüglich* $U \iff f - \widehat{g} \perp U$

Beweis:

„$\Longleftarrow$": Für $g \in U$: $\|f - g\|^2 \;=\; \|f - \widehat{g} + \underbrace{(\widehat{g} - g)}_{\in U}\|^2 \;=\; \|f - \widehat{g}\|^2 + \|\widehat{g} - g\|^2$

„$\Longrightarrow$": *Sonst* existiert ein $g \in U$ so, dass $\langle f - \widehat{g}, g\rangle =: \alpha \neq 0$; für $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\big\|f - \underbrace{(\widehat{g} - \lambda g)}_{\in U}\big\|^2 \;=\; \big\|(f - \widehat{g}) + \lambda g\big\|^2$$
$$= \|f - \widehat{g}\|^2 + 2\,\mathfrak{Re}\,\lambda\,\langle g, f - \widehat{g}\rangle + |\lambda|^2\,\|g\|^2$$

Für $\lambda := -\dfrac{\alpha}{\|g\|^2}$: $\ell.S. = \|f - \widehat{g}\|^2 - \dfrac{|\alpha|^2}{\|g\|^2}$ Widerspruch! $\square$

Bemerkung 3.2.3

Vor.: $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *Prä-*HILBERT*raum (also* $\langle\ ,\ \rangle$ *Skalarprodukt);* $A, B \subset H$

Beh.: *a)* $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$; $\{0\}^\perp = H$, $H^\perp = \{0\}$

b) $A \cap A^\perp \subset \{0\}$

c) $A \subset (A^\perp)^\perp =: A^{\perp\perp}$ $\quad (A \perp A^\perp)$

d) $A^\perp$ *ist ein abgeschlossener UR von* H*.*

e) $A^\perp = \langle A\rangle^\perp = \big(\overline{\langle A\rangle}\big)^\perp$

Beweis: a), b) c): ✓

d): $A^\perp = \bigcap_{y \in A} \operatorname{Kern}\langle\,\cdot\,, y\rangle$ $\quad\big($und $\langle\,\cdot\,, y\rangle \in H'$ für $y \in H$ (nach (3.1.3.a))$\big)$

e): nach a) ist jeweils „$\supset$" gegeben. $A^\perp \subset \langle A\rangle^\perp$: ✓
Zu $y \in \overline{\langle A\rangle}$ existiert eine Folge $(y_n) \in \langle A\rangle^{\mathbb{N}}$ mit $y_n \longrightarrow y$; für $x \in \langle A\rangle^\perp$ gilt damit $0 = \langle x, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$, also $x \perp y$. $\square$

Im folgenden sei $\big(H, \langle\ ,\ \rangle\big)$ ein HILBERT*raum*.

Bemerkung 3.2.4

Vor.: M *abgeschlossener Unterraum* von* H

Beh.: $H = M + M^\perp$*,* $M \cap M^\perp = \{0\}$*,*
$M^\perp$ *ist ein abgeschlossener Unterraum von* H*.*

Beweis: Nach (3.2.3) nur noch *zu zeigen:* $H \subset M + M^\perp$.

Zu $x \in H$ existiert nach (3.2.1) das Proximum y_x bezüglich M. Nach (3.2.2) gilt $x - y_x \in M^\perp$; $x = y_x + (x - y_x)$ ist die gewünschte Darstellung. $\square$

Bemerkung 3.2.5 *Für* $M \subset H$ *gilt:* $\overline{\langle M\rangle} = M^{\perp\perp}$

Beweis:
$$\overline{\langle M\rangle} \overset{(3.2.3.c)}{\subset} \overline{\langle M\rangle}^{\perp\perp} \overset{(3.2.3.e)}{=} M^{\perp\perp} \qquad ②$$

Daher *noch zu zeigen:* $M^{\perp\perp} \subset \overline{\langle M\rangle}$: $N := \overline{\langle M\rangle}$ ist ein abgeschlossener UR von H $\big($dazu (2.1.2.c) beachten$\big)$. Für $x \in M^{\perp\perp}$ existieren — nach (3.2.4) — $x_1 \in N$, $x_2 \in N^\perp$ mit $x = x_1 + x_2$; mit ② folgt

$$M^{\perp\perp} \ni x - x_1 \;=\; x_2 \in N^\perp \overset{(3.2.3.e)}{=} M^\perp,$$

also — nach (3.2.3.b) — $x - x_1 = 0$, d. h. $x = x_1 \in N = \overline{\langle M\rangle}$. $\square$

Zusatz 3.2.6

Vor.: M *abgeschlossener Unterraum von* H

Bez.: *Für* $x \in H$ *existieren — nach (3.2.4) — eindeutig*
$x_1 =: Px \in M$*,* $x_2 =: Qx \in M^\perp$ *mit* $x = x_1 + x_2$*.*

Beh.: *a)* P *ist linear mit* $P^2 = P$*.*

b) $\|P\| \le 1$*,* $M \neq \{0\} \Longrightarrow \|P\| = 1$

c) $\forall\, x, y \in H \quad \langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$

d) $\forall\, x \in H \quad \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$

* Unter diesen Voraussetzungen nennt man $M^\perp$ auch *„orthogonales Komplement"*.

a), b) zeigen: P ist ein *Projektor.*

Beweis: a): ✓

d): $\|x\|^2 = \langle Px+Qx, Px+Qx\rangle \overset{\checkmark}{=} r.\,S.$

b): nach d): $\|Px\| \le \|x\|$ $(x \in H)$, also $\|P\| \le 1$;
für $x \in M$ gilt $\|Px\| = \|x\|$, also $\|P\| \ge 1$, falls $M \neq \{0\}$.

c): $\ell.\,S. = \langle Px, Py+Qy\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle Px+Qx, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$ □

Anmerkung In HILBERTräumen ist (2.3.3) (‚HAHN-BANACH') ‚trivial':

Vor.: M Teilraum von H, $f \in M'$

Beh.: Es existiert eine Fortsetzung $F \in H'$ von f mit $\|F\| = \|f\|$.

Beweis: Zu f existiert $f_1 \in \overline{M}'$ mit $f_{1/M} = f$ (stetige Fortsetzung auf die abgeschlossene Hülle), dann $\|f\| \overset{\checkmark}{=} \|f_1\|$. Mit P zu $\overline{M}$ gemäß (3.2.6): $F := f_1 \circ P \in H'$ erfüllt die Behauptung: ✓ □

Satz 3.2.7 von RIESZ

a) Für $y \in H$ ist $\varphi y := \langle\,\cdot\,, y\rangle \in H'$ mit $\|\varphi y\| = \|y\|$.

b) $\forall\, f \in H'\ \dot\exists\, y \in H\ \ f = \varphi y$

Beweis:

a): $|(\varphi y)x| = |\langle x, y\rangle| \overset{(3.1.3\,a)}{\le} \|x\|\,\|y\| \implies \varphi y \in H'$ und $\|\varphi y\| \le \|y\|$;
$|(\varphi y)y| = |\langle y, y\rangle| = \|y\|^2$ zeigt $\|\varphi y\| \ge \|y\|$.

b): Œ $f \neq 0$: Dann ist $M := \operatorname{Kern} f$ ein abgeschlossener UR von H mit $M \neq H$, also $M^\perp \neq \{0\}$ (nach (3.2.4)). Wähle ein $a \in M^\perp$ mit $\|a\| = 1$; für beliebiges $x \in H$ und $u(x) := (f\,x)a - (f\,a)x$ $(\in H)$ hat man $f\,u(x) = 0$, also $u(x) \in M$ und somit

$$\langle u(x), a\rangle = 0\,. \qquad ③$$

Daher $f\,x \underset{\|a\|=1}{=} f\,x\langle a, a\rangle \overset{③}{=} f\,a\langle x, a\rangle = \langle x, \underbrace{\overline{f\,a}\,a}_{=:y}\rangle$.

Eindeutigkeit: ✓ □

Zusatz 3.2.8

Die in (3.2.7) definierte Abbildung $\varphi\colon H \ni y \longmapsto \langle\,\cdot\,, y\rangle \in H'$ ist bijektiv, normerhaltend und ‚konjugiert-linear', d. h.:
$\varphi(\alpha y_1 + y_2) = \overline{\alpha}\varphi y_1 + \varphi y_2 \quad (\alpha \in \mathbb{K};\ y_1, y_2 \in H)$.

Beweis: ✓ □

Folgerung 3.2.9 *Jeder HILBERTraum ist reflexiv.*

Beweis: Es sei $F \in H''$. *Gesucht* ist ein $x \in H$ mit $\varkappa x = F$, d. h. für alle $x' \in H'$ gilt $x'x = Fx'$; nach (3.2.7) ist dies äquivalent zu:

$$\forall\, y \in H \quad F(\varphi y) = (\varphi y)x = \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} = \overline{(\varphi x)y}\,,$$

also weiter äquivalent zu:

$$\forall\, y \in H \quad (\varphi x)y = \overline{F(\varphi y)}\,.$$

Die Abbildung $H \ni y \longmapsto \overline{F(\varphi y)} \in \mathbb{K}$ ist (nach (3.2.8)) linear (und beschränkt); daher folgt die Existenz von x nach (3.2.7.b). □

3.3 Orthonormalbasen

Im folgenden seien noch I eine nichtleere Menge und $(x_i)_I$ ein *ONS*.

Bezeichnung

$(x_i)_I$ heißt *„vollständig"* oder *„Orthonormalbasis"* *„ONB"* $:\iff$
$(x_i)_I$ *‚maximales' ONS.*

Bei den im nächsten Satz auftretenden Reihen ist entweder (3.1.2 b) zu beachten ($\rightsquigarrow$ *unbedingte Konvergenz*) oder — schöner — die folgende Definition von *„Summierbarkeit"* heranzuziehen:

Definition

Voraussetzung: $(E, \|\ \|)$ $\mathbb{K}$-*NVR, I nichtleere Menge, $x_i \in E$ $(i \in I)$, $x \in E$*

$\sum_I x_i = x :\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, I_0$ *(endlich, $\subset I$)* $\forall\, J$ *(endlich, $\subset I, \supset I_0$)*

$$\Big|\sum_J x_i - x\Big| < \varepsilon$$

Satz 3.3.1

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) (x_i) *ist eine ONB.*

b) $\forall\, y \in H \quad y = \sum_I \langle y, x_i\rangle\, x_i$ („FOURIER-**Entwicklung**“)*

c) $\forall\, x, y \in H \quad \langle x, y\rangle = \sum_I \langle x, x_i\rangle \langle x_i, y\rangle$

d) $\forall\, y \in H \quad \|y\|^2 = \sum_I |\langle y, x_i\rangle|^2$ („PARSEVAL-**Gleichung**“)

e) $\langle \{x_i : i \in I\}\rangle$ *ist dicht in* H.

Anmerkung

Die *Konvergenz der Reihe in* b) folgt mit

$$\Big\| \sum_J \langle y, x_i\rangle\, x_i \Big\|^2 \overset{(3.1.1.d)}{=} \sum_J |\langle y, x_i\rangle|^2$$

(für $I \supset J$ endlich) aus (3.1.2) und der Vollständigkeit von $(H, \|\ \|)$. Die Konvergenz der Reihe in c) folgt mit der HÖLDER-Ungleichung für ℓ_2 (und (3.1.2.a)). Die Reihe in b) ist unbedingt konvergent, *nicht* notwendig absolut konvergent. Die Reihe in c) ist absolut konvergent.

Beweis (von (3.3.1)): c) $\Longrightarrow$ d): ✓

Im folgenden sei J eine endliche Teilmenge von I :

b) $\Longrightarrow$ c): $\Big\langle \sum_J \langle x, x_i\rangle x_i, \sum_J \langle y, x_j\rangle x_j \Big\rangle \overset{\checkmark}{=} \sum_J \langle x, x_i\rangle \langle x_i, y\rangle$; mit der Stetigkeit von $\langle\ ,\ \rangle$ folgt die Behauptung.

d) $\Longrightarrow$ b): $\big\| y - \sum_J \langle y, x_i\rangle x_i \big\|^2 \overset{(3.1.1.c)}{=} \|y\|^2 - \sum_J |\langle y, x_i\rangle|^2$

a) $\Longrightarrow$ b): Für $x := y - \sum_I \langle y, x_i\rangle x_i$ (Anmerkung beachten!) hat man (mit der Stetigkeit von $\langle\ ,\ \rangle$): $\langle x, x_j\rangle = 0$ für alle $j \in I$ und somit — da (x_i) *maximales* ONS ist — $x = 0$.

b) $\Longrightarrow$ e): ✓

e) $\Longrightarrow$ a): $x \in \{x_i : i \in I\}^\perp \overset{(3.2.3.e)}{=} \overline{\langle \{x_i : i \in I\}\rangle}^{\perp} \overset{\text{Vor.}}{=} H^\perp = \{0\}$: $x = 0$ □

* Die Koeffizienten $\langle y, x_i\rangle$ heißen „FOURIER-*Koeffizienten*“ (zu ...).

Kapitel 4

Diverses

4.1 Der Satz von Baire

Der — relativ einfach zu beweisende — Kategoriesatz von BAIRE hat viele weittragende und auch überraschende Anwendungen (siehe unten und Kapitel 5)!

Es sei $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ ein TR.

Bezeichnung Für $A \subset \mathfrak{R}$: A „*nirgends dicht* (in $\mathfrak{R}$)“: $\Longleftrightarrow \overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$

A heißt genau dann „*mager (in* $\mathfrak{R}$*)*“ oder „*von 1. Kategorie (in* $\mathfrak{R}$*)*“, wenn nirgends dichte Mengen B_ν in $\mathfrak{R}$ (für $\nu \in \mathbb{N}$) mit $A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_\nu$ existieren.

A „*von 2. Kategorie (in* $\mathfrak{R}$*)*“ : $\Longleftrightarrow$ A nicht mager (in $\mathfrak{R}$)

Trivialität 4.1.1 *Für* $A, B \subset \mathfrak{R}$

a) A *nirgends dicht (mager)* $\wedge\, B \subset A \Longrightarrow B$ *nirgends dicht (mager)*

b) A *nirgends dicht* $\Longrightarrow \overline{A}$ *nirgends dicht*

c) A_ν *mager* $(\nu \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ *mager*

d) A *nirgends dicht* $\Longleftrightarrow \overline{A}$ *enthält keine nichtleere offene Menge.*

Bemerkung 4.1.2 *Die folgenden Bedingungen sind* äquivalent:

a) A *mager* $\Longrightarrow \widetilde{A}$ *dicht* *b)* $\emptyset \neq O \in \mathbb{O} \implies$ *O von 2. Kategorie (in* $\mathfrak{R}$*)*

c) $\mathfrak{R} \supset A_\nu \in \mathbb{A},\ \overset{\circ}{A_\nu} = \emptyset\ \ (\nu \in \mathbb{N}) \implies \Big(\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\Big)^{\circ} = \emptyset$

d) $\mathbb{O} \ni O_\nu$ *dicht* $(\nu \in \mathbb{N}) \implies \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ *dicht*

Definition

$(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *heißt genau dann „*Baire*-Raum“, wenn eine der äquivalenten Eigenschaften a), b), c), d) aus Bemerkung 4.1.2 gilt.*

Beweis:

a) $\Longrightarrow$ b): $\mathfrak{R} \neq \widetilde{O}$ ist abgeschlossen, also ist $\widetilde{O}\ \Big(= \overline{\widetilde{O}}\Big)$ *nicht* dicht, somit nach a): O *nicht* mager.

b) $\Longrightarrow$ c): $A := \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ ist nach Voraussetzung mager, daher ist auch $\overset{\circ}{A}$ mager, also — nach b) — $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

c) $\Longrightarrow$ d): $\mathfrak{R} = \overline{O_\nu} \overset{(1.3.3)}{=} \widetilde{\overset{\circ}{\widetilde{O_\nu}}}$, also $\overset{\circ}{\widetilde{O_\nu}} = \emptyset$; für $O := \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ hat man nach c)

$\overset{\circ}{\widetilde{O}} = \Big(\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \widetilde{O_\nu}\Big)^{\circ} = \emptyset$, also $\overline{O} \overset{(1.3.3)}{=} \widetilde{\overset{\circ}{\widetilde{O}}} = \mathfrak{R}$.

d) $\Longrightarrow$ a): Ist A mager, so existieren $A_\nu \subset \mathfrak{R}$ mit $\overset{\circ}{\overline{A_\nu}} = \emptyset$ und $A = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$.

Für $O_\nu := \widetilde{\overline{A_\nu}}$ gilt dann $\overline{O_\nu} \overset{(1.3.3)}{=} \widetilde{\overset{\circ}{\overline{A_\nu}}} = \mathfrak{R}$, also ist nach d) $\bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ dicht; wegen $\widetilde{A} = \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} \widetilde{A}_\nu \supset \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ folgt: $\widetilde{A}$ dicht $\square$

Satz 4.1.3

$(\mathfrak{R}, \delta)$ *vollständiger semimetrischer Raum* $\implies (\mathfrak{R}, \mathbb{O}(\delta))$ Baire*-Raum*

Mit (4.1.2) $\big($b) für $O := \mathfrak{R}\big)$ hat man dann die

Folgerung 4.1.4 Kategoriesatz von Baire

Jeder vollständige semimetrische Raum ist von 2. Kategorie (in sich).

Beweis von (4.1.3): Es seien $\mathbb{O}(\delta) \ni O_\nu$ dicht $(\nu \in \mathbb{N})$: $O := \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$ und $\emptyset \neq V \in \mathbb{O}$ beliebig; zu zeigen ist: $O \cap V \neq \emptyset$
O_1 ist dicht: Es existieren $x_1 \in \mathfrak{R}$ und $0 < \varepsilon_1 < 1$ mit $\big(U_{x_1}^{\varepsilon_1} \subset\big) K_{x_1}^{\varepsilon_1} \subset O_1 \cap V$;
O_2 ist dicht: Es existieren $x_2 \in \mathfrak{R}$ und $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ mit $K_{x_2}^{\varepsilon_2} \subset O_2 \cap U_{x_1}^{\varepsilon_1}$
(induktiv): Es existieren $x_n \in \mathfrak{R}$ und $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$ mit $K_{x_n}^{\varepsilon_n} \subset O_n \cap U_{x_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$ für $n \geq 2$.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $i, j > n$: $x_i, x_j \in U_{x_n}^{\varepsilon_n}$, also $\delta(x_i, x_j) < 2\varepsilon_n < \frac{2}{n}$; somit ist (x_ν) eine CF, dazu existiert ein $x \in \mathfrak{R}$ mit $x_\nu \longrightarrow x$; da $x_j \in K_{x_n}^{\varepsilon_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $j \geq n$: $x \in K_{x_n}^{\varepsilon_n}$, also $x \in O \cap V$. $\square$

4.1.5 „Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit“

Vor.: $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ Baire-Raum, $\mathfrak{F} \subset \big\{f \mid f\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig$\big\}^*$ $\forall x \in \mathfrak{R} \quad \sup\limits_{f \in \mathfrak{F}} f(x) =: M_x < \infty$ ($\mathfrak{F}$ *„punktweise gleichmäßig nach oben beschränkt“*)
Beh.: Es existieren $\emptyset \neq O \in \mathbb{O}$, $0 \leq M < \infty$ mit: $\forall f \in \mathfrak{F}\ \forall x \in O\ \ f(x) \leq M$

Beweis: Œ $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ Für $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathfrak{F}$ ist

$$E(m, f) := \big\{x \in \mathfrak{R} : f(x) \leq m\big\}$$

abgeschlossen, da f stetig ist. So ist auch

$$E_m := \bigcap_{\mathfrak{F}} E(m, f) \qquad \textit{abgeschlossen.}$$

Zu $x \in \mathfrak{R}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $M_x \leq m$, also $x \in E_m$; das zeigt $\mathfrak{R} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$.

Nach (4.1.2) existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{E}_m \neq \emptyset$. $O := \overset{\circ}{E}_m$ und $M := m$ tun's. $\square$

Als weitere (nichttriviale) **Anwendung** von (4.1.4) zeigen wir, daß es $\big($z. B. auf $[0,1]\big)$ *stetige* (reellwertige) *Funktionen* gibt, *die nirgends differenzierbar sind*. Wir werden sogar sehen: Im Baire-Sinne sind *‚fast alle‘* — d. h. bis auf eine magere Ausnahmemenge alle — *stetigen Funktionen nirgends differenzierbar.*

$M_r := \big\{f \in \mathrm{C}^{\mathbb{R}}[0,1]$: Für mindestens ein $\tau \in [0,1[$ ist f in τ rechtsseitig dfb.$\big\}$

Beh.: M_r ist mager in $\mathrm{C}^{\mathbb{R}}[0,1]$.

* Es genügt: *‚unterhalb halbstetig‘*

Beweis: $\mathrm{C} := \mathrm{C}^{\mathbb{R}}[0,1]$ mit δ_s ist ein vollständiger MR. Für $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ sei

$$A_n := \left\{ f \in \mathrm{C} : \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq n \ \text{ für alle } h \in \left]0, \frac{1}{n}\right] \right\}$$

(a) $M_r \subset \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} A_n$: ✓

(b) A_n ist *abgeschlossen*: Es seien $f_k \in A_n \quad (k \in \mathbb{N})$ und $f \in \mathrm{C}$ mit $\|f_k - f\|_s \longrightarrow 0$: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $x_k \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ so, daß $|f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| \leq n\,h$ für $h \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass existiert ein $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ so, daß Œ (zunächst Teilfolge!) $x_k \longrightarrow x$. $\ h \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$ fest und $\varepsilon > 0$: Es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f\|_s < \varepsilon$, $|f(x_k) - f(x)| < \varepsilon$ und $|f(x_k + h) - f(x+h)| < \varepsilon$; dann kann abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
&|f(x+h) - f(x)| \\
\leq\ & |f(x+h) - f(x_k + h)| + |f(x_k + h) - f_k(x_k + h)| \\
&+ |f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| + |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\
<\ & \varepsilon + \varepsilon + n\,h + \varepsilon + \varepsilon \ = \ n\,h + 4\varepsilon
\end{aligned}$$

($\varepsilon > 0$ beliebig zeigt:) $\quad f \in A_n$

(c) $\overset{\circ}{A_n} = \emptyset$: *Sonst* existierten $f \in A_n$ und $\varepsilon > 0$ so, daß $U_f^{2\varepsilon} \subset A_n$; nach dem Approximationssatz von Weierstrass existierte ein Polynom P_1 mit $P := {P_1}_{/[0,1]} \in U_f^{\varepsilon}$, dann $U_p^{\varepsilon} \subset U_f^{2\varepsilon} \subset A_n$. Wähle $0 \leq g \in \mathrm{C}$ mit $\|g\|_s < \varepsilon$, stückweise linear, Steigung aller linearen Abschnitte betraglich größer als $n + \|P'\|_s$ (z. B. „Sägezahn"-Funktion). Dann $g + P \in U_p^{\varepsilon} \setminus A_n$ Widerspruch! □

Entsprechend ist

$$M_\ell := \left\{ f \in \mathrm{C} : \text{Für mindestens ein } \tau \in]0,1] \text{ ist } f \text{ in } \tau \text{ linksseitig dfb.} \right\}$$

mager in C $\quad$ (*ebenso oder mit* $[0,1] \ni x \longmapsto 1 - x$ *aus obigem*); *daher ist*

$$\{ f \in \mathrm{C} : \text{Für mindestens ein } \tau \in [0,1] \text{ ist } f \text{ in } \tau \text{ einseitig dfb.} \} \text{ mager in C.}$$

Der Beweis zeigt sogar:

$$\left\{ f \in \mathrm{C} : \text{Für ein } \tau \in [0,1] \text{ hat } f \textit{ in } \tau \textit{ einen einseitig beschränkten Differenzenquotienten.} \right\}$$

ist mager in C. Nach (4.1.2) und (4.1.4) sind die Komplemente all dieser Mengen dicht in C!

⟨Ergänzungen dazu z. B. in Oxtoby⟩

4.2 Reihen in Normierten Vektorräumen

Es sei $E := (E, \|\ \|) := (E, a, s, \|\ \|)$ ein Normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Definition *

Zu $k \in \mathbb{Z}$ *und* $\alpha \colon \mathbb{N}_k \longrightarrow E$ *betrachten wir die ‚Folge der Partialsummen'* $\sum \alpha \colon \mathbb{N}_k \longrightarrow E$, *definiert durch*

$$\left(\sum \alpha\right)(k) \ := \ \sum_{\kappa=k}^{k} \alpha(\kappa) \ := \ \alpha(k)$$

$$\textit{und für } \mathbb{N}_k \ni n \quad \left(\sum \alpha\right)(n+1) \ := \ \sum_{\nu=k}^{n+1} \alpha(\nu) \ := \ \left(\sum_{\nu=k}^{n} \alpha(\nu)\right) + \alpha(n+1)\,.$$

Meist benutzte *Sprech- und Schreibweisen:*

Für $a \in E$: $\quad \sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\nu) = a :\Longleftrightarrow \sum\limits_{\nu=k}^{n} \alpha(\nu) \longrightarrow a \quad (\mathbb{N}_k \ni n \longrightarrow \infty)$

„Die ‚Reihe' $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\nu)$ *ist konvergent"* $:\Longleftrightarrow \sum \alpha$ *ist konvergent*

„Die ‚Reihe' $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\nu)$ *ist absolut konvergent"* $:\Longleftrightarrow \sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \|\alpha(\nu)\|$ *konvergent;*

usw.

Satz 4.2.1

Vor.: E *BR;* $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \colon \mathbb{N}_k \longrightarrow E$, $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\nu)$ *absolut konvergent*

Beh.: *a)* $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\nu)$ *ist konvergent und* $\left\| \sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\nu) \right\| \leq \sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \|\alpha(\nu)\|$.

b) *Für* $\sigma \colon \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{N}_k$ *bijektiv ist*

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\sigma(\nu)) \ \begin{cases} \textit{(absolut) konvergent} \\ = \sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\nu) \end{cases}.$$

* Ich erinnere noch einmal an die Bezeichnung $\mathbb{N}_k := \{k, k+1, k+2, \dots\}$.

Beweis: $s := \sum \alpha$

a): Für $n \in \mathbb{N}_k$ und $p \in \mathbb{N}$

$$\|s(n+p) - s(n)\| = \left\| \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \alpha(\nu) \right\| \leq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \|\alpha(\nu)\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty);$$

daher ist s eine CF; somit existiert eindeutig ein $c \in E$ mit $s(n) \longrightarrow c = \sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\nu)$ für $n \longrightarrow \infty$; dann gilt

$$\|c\| \longleftarrow \|s(n)\| \leq \sum_{\nu=k}^{n} \|\alpha(\nu)\| \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} \|\alpha(\nu)\|, \text{ also } \quad \|c\| \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} \|\alpha(\nu)\|.$$

b): 1. Für $n \in \mathbb{N}_k$ gilt $\displaystyle\sum_{\nu=k}^{n} \|\alpha(\sigma(\nu))\| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \|\alpha(j)\| < \infty$;

dies zeigt: $\displaystyle\sum_{\nu=k}^{\infty} \alpha(\sigma(\nu))$ ist absolut konvergent.

2. $t := \sum(\alpha \circ \sigma)$: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}_k$ mit

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \|\alpha(j)\| \leq \varepsilon;$$

dazu existiert — da σ surjektiv ist — ein $M \in \mathbb{N}_k$ mit $\{k, \ldots, N\} \subset \{\sigma(k), \ldots, \sigma(M)\}$; offenbar gilt $M \geq N$. Für $\mathbb{N}_k \ni n > M$ folgt so

$$\|t(n) - s(n)\| = \left\| \sum_{j=k}^{n} \alpha(\sigma(j)) - \sum_{\nu=k}^{n} \alpha(\nu) \right\| \leq \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \|\alpha(\nu)\| \leq \varepsilon,$$

also $t(n) \longrightarrow c$. □

In einem BR folgt nach dem vorangehenden Satz aus der absoluten Konvergenz einer Reihe ihre Konvergenz. Diese Eigenschaft ist für die Vollständigkeit charakteristisch:

Satz 4.2.2

Vor.: $\forall\, \alpha \in E^{\mathbb{N}}: \quad \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha(\nu)$ *absolut konvergent* $\Longrightarrow \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha(\nu)$ *konvergent*
Beh.: E ist ein BR.

Beweis: Ist $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$ eine CF, dann existieren Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ derart, daß $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|a_{n_{j+1}} - a_{n_j}\| < \infty$ □□□ ; nach Voraussetzung existiert ein $c \in E$ mit $\sum\limits_{j=1}^{k-1} (a_{n_{j+1}} - a_{n_j}) \longrightarrow c$ für $k \longrightarrow \infty$; $\ell.\,S. = a_{n_k} - a_{n_1}$, also $a_{n_k} \longrightarrow c + a_{n_1} =: b$. Da (a_n) eine CF ist, folgt □□□ $a_n \longrightarrow b \;\; (n \longrightarrow \infty)$ □

„Neumann-**Reihe**"

Es sei $A = \big(A, a, s, m, e, \|\;\|\big)$ eine (B)-Algebra (über $\mathbb{K}$, mit Eins e)*

Bezeichnung

Für $x \in A$: $\quad x^0 := e\,, \quad x^{n+1} := x^n \cdot x \quad \big(n \in \mathbb{N}_0\big)$

x *„Einheit"*: $\Longleftrightarrow \exists\, y \in A \quad x\,y = e = y\,x \quad \big(\Longleftrightarrow \dot{\exists}\ \ldots\big)$; dann: $y =: x^{-1}$

$\mathfrak{I}(A) := \big\{x \in A : x \text{ Einheit}\big\}$

Trivialität 4.2.3 $\big(\mathfrak{I}(A), m, e\big)$ *ist eine Gruppe.* *(‚Einheiten-Gruppe')*

Satz 4.2.4

Vor.: $x \in A$ mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ *konvergent*
Beh.: $e - x \in \mathfrak{I}(A) \;\wedge\; (e-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

Anmerkung Die Voraussetzung in (4.2.4) ist — nach (4.2.1) — gegeben, falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x^n\| < \infty$, insbesondere also, falls $\|x\| < 1$. $\big($Beachten: $\|x^n\| \leq \|x\|^n \quad (n \in \mathbb{N})\big)$

Beweis (zu (4.2.4)): Mit $s := \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

$$\begin{array}{ccccc} (e-x)\sum\limits_{j=0}^{n} x^j & \overset{\checkmark}{=} & \Big(\sum\limits_{j=0}^{n} x^j\Big)(e-x) & = & e - x^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (e-x)s & & s(e-x) & & e \end{array}$$

□

---

* Für die folgenden Überlegungen genügt die Ringstruktur.

Folgerung 4.2.5

a) *Die Abbildung* $\mathfrak{I}(A) \ni x \longmapsto x^{-1} \in \mathfrak{I}(A)$ *ist stetig.*

b) $\mathfrak{I}(A)$ *ist offen (in* A*).*

Beweis:

α): Falls $x \in A$ mit $\|x\| < 1$ $\big(e - x \in \mathfrak{I}(A)$ und:$\big)$

$$\Big\| (e-x)^{-1} - \sum_{j=0}^{n} x^j \Big\| \leq \frac{\|x\|^{n+1}}{1-\|x\|} \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$$

denn

$$\ell.\,S. \stackrel{(4.2.4)}{=} \Big\| \sum_{j=n+1}^{\infty} x^j \Big\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|x\|^j = r.\,S.$$

β): Für $x \in \mathfrak{I}(A)$, $\alpha \in \,]0,1[$ und $h \in A$ mit $\|h\| \leq \alpha \|x^{-1}\|^{-1}$ ist $x + h \in \mathfrak{I}(A)$ und

$$\big\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\big\| \leq \frac{1}{1-\alpha}\,\|x^{-1}\|^3\,\|h\|^2\,; \qquad (*)$$

denn $x + h = x(e + x^{-1}h)$:

$\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\,\|h\| \leq \alpha \stackrel{(4.2.4)}{\Longrightarrow} e + x^{-1}h \in \mathfrak{I}(A)$, also $x + h \in \mathfrak{I}(A)$

und $(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = \big[(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\big]x^{-1}$:

mit $y := -x^{-1}h$ aus α) (für $n = 1$):

$$\begin{aligned}\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| &\leq \big\|(e-y)^{-1} - e - y\big\|\,\|x^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|y\|^2}{1-\|y\|}\,\|x^{-1}\| \leq r.\,S.\end{aligned}$$

□

Aus $(*)$ liest man die Stetigkeit (und sogar die (F-)*Differenzierbarkeit*) der Inversenbildung

$$\mathfrak{I}(A) \ni x \longmapsto x^{-1} \in \mathfrak{I}(A)$$

(und den Wert der Ableitung) ab.

Nach (2.2.8) können wir dies alles anwenden auf $A := L(E,E)$ für einen Banachraum E.

Beispiel E BR, $y \in E$, $A \in \mathfrak{I}(L(E,E)) =: \mathfrak{I}$
Gesucht ist ein $x \in E$ mit $Ax = y$.

Ist B ein *„Näherungsoperator"* für A, dann löst man oft ‚ersatzweise' die Gleichung $Bz = y$. Falls $\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$: $\|A^{-1}(A-B)\| < 1$, somit existiert — nach (4.2.4) — $\big(\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B)\big)^{-1}$ $(\in \mathfrak{I})$ und $\big($wegen $B = A(\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B))\big)$
$B^{-1} = (\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B))^{-1}A^{-1}$ $(\in \mathfrak{I})$; dann gilt die *Fehlerabschätzung:*

$$\begin{aligned}\|z - x\| &= \big\|B^{-1}y - A^{-1}y\big\| \leq \big\|B^{-1} - A^{-1}\big\|\,\|y\| \\ &= \big\|\big((\mathrm{id}_E - A^{-1}(A-B))^{-1} - \mathrm{id}_E\big)A^{-1}\big\|\,\|y\| \\ &\stackrel{*}{\leq} \frac{\|A^{-1}(A-B)\|}{1 - \|A^{-1}(A-B)\|}\,\|A^{-1}\|\,\|y\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2\,\|A-B\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|A-B\|}\,\|y\|\end{aligned}$$

Speziell z. B. $E = \mathbb{R}^n$, A (n,n)-Matrix, $Ax = y$ *lineares Gleichungssystem,* B Näherungsmatrix $\big($z. B. reelle Zahlen durch abbrechende Dezimalzahlen oder ‚Maschinenzahlen' approximieren.$\big)$

Beispiel für ***nicht*** **beschränkte Operatoren der Quantenmechanik**

Mehrere Paare von ‚Operatoren' (P,Q) der Quantenmechanik erfüllen die *Vertauschungsrelation*

$$\boxed{PQ - QP = -i\hbar} \qquad \big(:= -i\hbar\,\mathrm{id}_E\big)$$

($\hbar$ Planck-Konstante)

$\big($z. B. $P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ ‚*Impulsoperator*' $\big((Pu)(\xi) = -i\hbar u'(\xi)\big)$
$Q = x$ ‚*Ortsoperator*' $\big((Qu)(\xi) = u(\xi)\cdot\xi\big)\big)$

Operatoren, die eine solche Vertauschungsrelation erfüllen, können *nicht* beide stetig sein; denn für $E \neq \{0\}$ hat man die:

Bemerkung 4.2.6

Vor.: $P, Q \in \mathcal{L}(E,E)$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $PQ - QP = \alpha\,\mathrm{id}_E$

Beh.: Mindestens einer der Operatoren P *und* Q *ist unstetig.***

Beweis: Annahme: Q stetig

* s. Beweis zu (4.2.5) $\big(\alpha$) mit $n = 0\big)$
** Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß dann der Raum E nicht endlichdimensional sein kann.

(I) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad PQ^n - Q^n P \;=\; \alpha\, n\, Q^{n-1}$

$n = 1$: nach Voraussetzung

$$
\begin{aligned}
n \rightsquigarrow n+1:\; PQ^{n+1} &= (PQ^n)Q \overset{\text{(Ind. Vor.)}}{=} (Q^n P + \alpha\, n\, Q^{n-1})Q \\
&= Q^n(PQ) + \alpha\, n\, Q^n \;=\; Q^n(QP + \alpha\,\mathrm{id}_E) + \alpha\, n\, Q^n \\
&= Q^{n+1}P + \alpha\,(n+1)Q^n
\end{aligned}
$$

(II) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad Q^n \neq 0$

Falls $Q^n = 0$ (für ein $n \in \mathbb{N}$), — nach (I) — $Q^{n-1} = 0$ und so schließlich ($\mathrm{id}_E =$) $Q^0 = 0$ Widerspruch!

(III)
$$
\left.\begin{array}{l}
|\alpha|\, n\, \|Q^{n-1}\| \overset{\text{(I)}}{\leq} 2\|P\|\,\|Q^n\| \\
\qquad\qquad\qquad \leq 2\|P\|\,\|Q\|\,\|Q^{n-1}\| \\
\text{nach (II) } 0 < \|Q^{n-1}\|, \\
\text{nach Voraussetzung } \|Q^{n-1}\| < \infty
\end{array}\right\}
\Longrightarrow
\left\{\begin{array}{l}
\text{(Für alle } n \in \mathbb{N}:) \\
|\alpha|\, n \leq 2\|P\|\,\underbrace{\|Q\|}_{<\infty} \\
\Longrightarrow \|P\| = \infty
\end{array}\right.
$$
□

4.3 Endlichdimensionale Normierte Vektorräume

Satz 4.3.1

Vor.: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\big(E_j, \|\ \|_j\big)$ *NVR über* $\mathbb{K}$ $\quad (j = 1, 2)$
$\dim E_1 \;=\; \dim E_2 \;=:\; n \in \mathbb{N}_0$

Beh.: E_1 *und* E_2 *sind (als NVRe) isomorph.*

Folgerung 4.3.2 *Jeder endlichdimensionale NVR über* $\mathbb{K}$ *ist ein BR.*

Beweis (zu (4.3.2)): Aus (4.3.1) mit der Vollständigkeit von $\big(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty\big)$ ablesen. □

Beweis (zu (4.3.1)): Œ sei $n \in \mathbb{N}$; offenbar *genügt es zu zeigen,* daß der Raum $\big(E_1, \|\ \|_1\big)$ *(NVR-) isomorph zu* $\big(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty\big)$ ist:
Es sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von E_1; dann ist die Abbildung

$$\omega\colon \mathbb{K}^n \ni (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \longmapsto \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, b_\nu \in E_1 \;\; \textit{ein algebraischer Isomorphismus.}$$

Mit $M \;:=\; \sum_{\nu=1}^{n} \|b_\nu\|_1$ ist für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\|\omega(\alpha)\|_1 \;\leq\; \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|\, \|b_\nu\|_1 \;\leq\; M\, \|\alpha\|_\infty \qquad (*)$$

Die Einheitskugel $S := \big\{\alpha \in \mathbb{K}^n : \|\alpha\|_\infty \;=\; 1\big\}$ ist kompakt. Die Abbildung

$$\mathbb{K}^n \ni \alpha \longmapsto \|\omega(\alpha)\|_1 \in [0, \infty[$$

ist stetig (nach $(*)$, da ω linear ist); daher existiert ein $\alpha^* \in S$ mit $m := \|\omega(\alpha^*)\|_1 \leq \|\omega(\alpha)\|_1$ für alle $\alpha \in S$; somit ist $m > 0$ mit $m\|\alpha\|_\infty \leq \|\omega(\alpha)\|_1$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}^n$. □

Bemerkung 4.3.3

Vor.: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\big(E_j, \|\ \|_j\big)$ *NVR über* $\mathbb{K}$ $\quad (j = 1, 2)$
$\dim E_1 < \infty$, $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$

Beh.: $T \in L(E_1, E_2)$

In Worten: □ □ □

Beweis: Œ sei $n := \dim E_1 \in \mathbb{N}$; mit einer Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von E_1 gilt für $\alpha \in \mathbb{K}^n$:

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \, T\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, b_\nu\Big) \Big\|_2 = \Big\| \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\, T\, b_\nu \Big\|_2 \leq \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|\, \|T\, b_\nu\|_2 \\
&\leq \|\alpha\|_\infty \sum_{\nu=1}^{n} \|Tb_\nu\|_2
\end{aligned}
$$

Über (4.3.1) folgt die Behauptung; denn mit der Abbildung ω aus dem Beweis zu (4.3.1) haben wir hier gezeigt:

$$\|T \circ \omega(\alpha)\|_2 \;\leq\; \|\alpha\|_\infty \cdot S \quad \text{mit} \quad S \;:=\; \sum_{\nu=1}^{n} \|Tb_\nu\|_2$$

Also ist zunächst $T \circ \omega$ stetig. Da ω^{-1} stetig ist, folgt die Stetigkeit von T. □

Mit (4.3.3) hat man so die:

Folgerung 4.3.4

Auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$*-VR sind alle Normen äquivalent.*

4.4 Initiale Topologien

Wir behandeln ein wichtiges Konstruktionsverfahren, um aus gegebenen topologischen Räumen neue zu bilden.

Es seien E, I nichtleere Mengen und für $i \in I$
$(F_i, \mathbb{O}_i)$ topologische Räume, $f_i \colon E \longrightarrow F_i \quad (\mathbb{O}_i \longmapsto \mathbb{U}^i)$.

Gesucht ist eine Topologie $\mathbb{O}$ auf dem Ausgangsbereich E, die in dem Sinne zu den gegebenen Abbildungen f_i ‚paßt', daß sie alle stetig werden. Verfeinert man eine solche Topologie, so sind die Abbildungen f_i erst recht stetig. Deshalb wählt man $\mathbb{O}$ minimal, d. h. gerade als *gröbste* Topologie, die dies leistet:

Bezeichnung

$$\mathbb{B} := \Big\{\bigcap_J f_i^{-1}(O_i) : O_i \in \mathbb{O}_i \quad (i \in J);\ I \supset J \text{ endlich}\Big\}$$

$$\mathbb{O} := \Big\{\bigcup_{\mathbb{B}_1} B : \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B}\Big\}$$

Satz 4.4.1

a) $(E, \mathbb{O})$ *ist ein TR.* $\quad$ *($\mathbb{O}$ „initiale Topologie" auf E)*

a') $\mathbb{S} := \{f_i^{-1}(O_i) : i \in I,\ O_i \in \mathbb{O}_i\}$ *ist eine Subbasis von* $\mathbb{O}$.

b) $\mathbb{O}$ *ist die* gröbste *Topologie auf E derart, daß alle f_i stetig sind.*

c) *Für $p \in E$ und $U \subset E$ gilt: U ist eine $(\mathbb{O})$-Umgebung von p* $\iff$
Es existieren J endlich $\subset I$, $U_i \in \mathbb{U}^i_{f_i(p)}$ $(i \in J)$ mit $\bigcap_J f_i^{-1}(U_i) \subset U$

d) $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $f \colon \mathfrak{S} \longrightarrow E$, $s \in \mathfrak{S}$:
f stetig in s $\iff \forall\, i \in I \quad f_i \circ f \colon \mathfrak{S} \longrightarrow F_i$ *stetig in s*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f_i"] & F_i \\ \mathfrak{S} \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "f_i \circ f"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis:

a): $\emptyset, E \in \mathbb{O}$: ✓ $\quad$ (O1): ✓ $\quad$ (O2): $\bigcup_{\mathbb{B}_1} B_1 \cap \bigcup_{\mathbb{B}_2} B_2 = \bigcup_{B_\kappa \in \mathbb{B}_\kappa} B_1 \cap B_2$, also nur zu zeigen: $B_1, B_2 \in \mathbb{B} \implies B_1 \cap B_2 \in \mathbb{B}$: □□□

a'): ✓

b): Es sei $\mathbb{T}$ eine Topologie auf E: $\ \forall\, i \in I \quad f_i \colon (E, \mathbb{T}) \longrightarrow (F_i, \mathbb{O}_i)$ stetig $\overset{(1.5.9)}{\iff} \forall\, i \in I\ \forall\, O_i \in \mathbb{O}_i \quad f_i^{-1}(O_i) \in \mathbb{T} \overset{\text{a')}}{\iff} \mathbb{O} \subset \mathbb{T}$

c): U Umgebung von $p \iff$ Es existiert $O \in \mathbb{O}$ mit $p \in O \subset U \iff$ Es existieren J endlich $\subset I$, $O_i \in \mathbb{O}_i$ $(i \in J)$ mit $p \in \bigcap_J f_i^{-1}(O_i) \subset U \iff$
Es existieren J endlich $\subset I$, $U_i \in \mathbb{U}^i_{f_i(p)}$ $(i \in J)$ mit $\bigcap_J f_i^{-1}(U_i) \subset U$

d): $\implies$: mit b);
$\impliedby$: Zu $U \in \mathbb{U}_{f(s)}$ existieren nach c) J endlich $\subset I$ und $U_i \in \mathbb{U}^i_{f_i(f(s))}$ $(i \in J)$ mit $\bigcap_J f_i^{-1}(U_i) \subset U$; daher: $\bigcap_J \underbrace{(f_i \circ f)^{-1}(U_i)}_{\in\, \mathbb{U}_s} =$
$f^{-1}\big(\bigcap_J f_i^{-1}(U_i)\big) \subset f^{-1}(U)$, also $f^{-1}(U) \in \mathbb{U}_s$. $\quad\square$

Spezialfälle

Urbild-Topologie *(Reziproke Topologie):*

$I := \{1\}$: $\quad$ (hier:) $\mathbb{O} \overset{\checkmark}{=} \mathbb{B} = \big\{f_1^{-1}(O_1) : O_1 \in \mathbb{O}_1\big\}$

Spurtopologie $\ (\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ TR, $\emptyset \neq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$
$I := \{1\}$, $(F_1, \mathbb{O}_1) := (\mathfrak{R}, \mathbb{O})$, $E := \mathfrak{M}$,
$f_1 := \omega \colon \mathfrak{M} \ni x \longmapsto x \in \mathfrak{R}$ $\quad$ *(‚Einbettung')*
Hier ist die zugehörige initiale Topologie $\mathbb{O}_{\mathfrak{M}}$ gleich
$\big\{\omega^{-1}(O) : O \in \mathbb{O}\big\} = \{O \cap \mathfrak{M} : O \in \mathbb{O}\} =: \mathbb{O} \underset{e}{\cap} \mathfrak{M}$.

Satz 4.4.2

a) $(\mathfrak{M}, \mathbb{O}_{\mathfrak{M}})$ *ist ein TR.* $\quad$ *($\mathbb{O}_{\mathfrak{M}}$: „Spurtopologie", „induzierte Topologie", „Relativtopologie": $\longmapsto \mathbb{A}_{\mathfrak{M}}, \mathbb{U}^{\mathfrak{M}}, \ldots$).*

b) $\mathbb{O}_{\mathfrak{M}}$ *ist die gröbste Topologie auf $\mathfrak{M}$ derart, daß ω stetig ist.*

c) $\forall\, x \in \mathfrak{M} \quad \mathbb{U}^{\mathfrak{M}}_x = \mathbb{U}_x \underset{e}{\cap} \mathfrak{M}$

d) $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $f \colon \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{M}$, $s \in \mathfrak{S}$:
f stetig in s $\iff \omega \circ f \ \big(: (\mathfrak{S}, \mathbb{T}) \longrightarrow (\mathfrak{R}, \mathbb{O})\big)$ *stetig in s*

e) $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}} = \mathbb{A} \underset{e}{\cap} \mathfrak{M}$

Beweis:

a), b), d): $\quad$ nach (4.4.1)

c): Für $x \in \mathfrak{M}$ und $U \subset \mathfrak{M}$: $U \in \mathbb{U}_x^{\mathfrak{M}} \overset{(4.4.1\,c)}{\iff}$ Es existiert $U_1 \in \mathbb{U}_x$ mit $U_1 \cap \mathfrak{M} = \omega^{-1}(U_1) \subset U \iff U \in \mathbb{U}_x \underset{e}{\cap} \mathfrak{M}$

e): Für $A \subset \mathfrak{M}$:
$A \in \mathbb{A}_{\mathfrak{M}} \iff$ Es existiert $O \in \mathbb{O}$ mit $A = \mathfrak{M} \setminus (O \cap \mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \cap \widetilde{O}$ □

Trivialität 4.4.3 $\emptyset \neq \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$: $\quad \left(\mathbb{O}_{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{N}} = \mathbb{O}_{\mathfrak{N}}$

Bemerkung 4.4.4 $\emptyset \neq \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$: $\quad \overline{\mathfrak{N}}^{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{M}$

Beweis: Für $x \in \mathfrak{M}$:
$x \in \ell.\,\mathrm{S.} \overset{(4.4.2\,c)}{\iff} \forall\, U \in \mathbb{U}_x \quad \emptyset \neq (U \cap \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{N} = U \cap \mathfrak{N} \iff x \in \mathrm{r.\,S.}$ □

Bemerkung 4.4.5

Vor.: (zusätzlich) $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $a \in \mathfrak{M}$, $f\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$

Beh.: α) f *stetig in* $a \implies f_{/\mathfrak{M}}$ *stetig in* a
β) f *stetig in* $a \;\not\Longleftarrow\; f_{/\mathfrak{M}}$ *stetig in* a

Beweis: α): $f_{/\mathfrak{M}} = f \circ \omega$

β): $\mathfrak{R} := \mathfrak{S} := \mathbb{R}$ (mit üblicher Topologie) $\quad f := \chi_{\mathbb{Q}}$, $\mathfrak{M} := \mathbb{Q}$:
$f_{/\mathfrak{M}}$ stetig, aber *für kein* $x \in \mathfrak{M}$ ist f stetig in x. □

Produkttopologie I nichtleere Menge, $(\mathfrak{R}_i, \mathbb{O}_i)$ TR $\quad (i \in I)$

‚Kartesisches Produkt der Mengen $\mathfrak{R}_i$*‘*:

($\rightsquigarrow$ mengentheoretische ‚Schwierigkeiten‘)

$$\mathfrak{R} := \prod_I \mathfrak{R}_i := \Big\{ x \mid x\colon I \longrightarrow \bigcup_I \mathfrak{R}_i,\ \forall\, j \in I \quad x(j) \in \mathfrak{R}_j \Big\}$$

Bezeichnung Für $x \in \mathfrak{R}$

$$(x_i)_I := \big(x(i)\big)_I := x$$

(Wenn I aus dem Zusammenhang heraus klar ist, notieren wir auch $(x_i) := x, \ldots$); für $j \in I$: $\quad x_j$ *„j-te Koordinate (von x)“*

$$p_j\colon \mathfrak{R} \ni x \longmapsto x_j \in \mathfrak{R}_j \qquad \text{„Projektion von } \mathfrak{R} \text{ auf } \mathfrak{R}_j\text{“}$$

Für $J \subset I$ und $M_i \subset \mathfrak{R}_i \quad (i \in J)$ ist

$$\bigcap_J p_i^{-1}(M_i) = \prod_I M_i, \tag{$*$}$$

wenn $M_i := \mathfrak{R}_i$ für $i \in I \setminus J$.

$$\mathbb{B} := \Big\{ \prod_I O_i : O_i \in \mathbb{O}_i \ (i \in J),\ O_i = \mathfrak{R}_i \ (i \in I \setminus J);\ J \text{ endlich} \subset I \Big\}$$

$$\mathbb{O} := \Big\{ \bigcup_{\mathbb{B}_1} B : \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B} \Big\}$$

Satz 4.4.6

> *a)* $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ *ist ein TR.* (*„Produktraum zu . . .“,* $\mathbb{O}$ *„Produkt-Topologie“*)
>
> *b)* $\mathbb{O}$ *ist die* gröbste *Topologie auf* $\mathfrak{R}$ *derart, daß alle Projektionen* p_i *stetig sind.*
>
> *c) Für* $q \in \mathfrak{R}$ *und* $U \subset \mathfrak{R}$ *gilt:*
> *U ist genau dann eine Umgebung von q, wenn J endlich* $\subset I$, $U_i \in \mathbb{U}^i_{q_i}$ $(i \in J)$ *mit* $\prod_I U_i \subset U$*, wobei* $U_i := \mathfrak{R}_i$ $(i \in I \setminus J)$*, existieren.*
>
> *d) Für* $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $f\colon \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{R}$, $s \in \mathfrak{S}$:
> f *stetig in* $s \iff \forall\, i \in I \quad p_i \circ f\colon \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{R}_i$ *stetig in* s
>
> *e) Für* $A_i \subset \mathfrak{R}_i$ $(i \in I)$: $\quad \boxed{\prod_I \overline{A_i} = \overline{\prod_I A_i}}$
>
> *f)* $\forall\, j \in I \quad \forall\, O \in \mathbb{O} \quad p_j(O) \in \mathbb{O}_j$ $\qquad$ *(p_j ist eine ‚offene‘ Abbildung.)*

Beweis: a), b), c), d): nach (4.4.1) (mit ($*$))

e): Œ $A_i \neq \emptyset \ (i \in I)$:

$\supset$: $\quad p_j\Big(\overline{\prod_I A_i}\Big) \overset{(1.5.9)}{\subset} \overline{p_j\big(\prod_I A_i\big)} = \overline{A_j}$;

$\subset$: $\quad a \in \ell.\,\mathrm{S.}$: Es seien J endlich $\subset I$ und $U_i \in \mathbb{U}^i_{a_i}$ für $i \in J$. Wählt man $U_i := \mathfrak{R}_i$ für $i \in I \setminus J$, dann existiert für alle $i \in I$ ein $x_i \in U_i \cap A_i$; damit $x \in \prod_I U_i \cap \prod_I A_i$, also (mit c)) $a \in \mathrm{r.\,S.}$

f): Ist $B = \prod_I O_i$ mit $O_i \in \mathbb{O}_i \ (i \in I)$, dann ist für $j \in J$

$$p_j(B) = \begin{cases} O_j, & \text{falls } B \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases},$$

also $p_j(B) \in \mathbb{O}_j$ (und das genügt offenbar). $\square$

Anmerkung zu (4.4.6 f):

$$A \in \mathbb{A} \not\Longrightarrow p_j(A) \in \mathbb{A}_j \qquad (j \in I)$$

Beispiel: $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$, $p_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = p_2(A)$ $\triangleleft$

3) Supremum von Topologien I nichtleere Menge, $(\mathfrak{R}, \mathbb{O}_i)$ TR $(i \in I)$
Mit $E := F_i := \mathfrak{R}$ und $f_i := \mathrm{id}_{\mathfrak{R}}$ $(i \in I)$ ist die zugehörige initiale Topologie auf $\mathfrak{R}$ gerade die *gröbste Topologie* auf $\mathfrak{R}$, die *feiner als alle* $\mathbb{O}_i$ ist.

4) Erzeugte Topologie $\mathfrak{R}$ nicht-leere Menge und $\mathbb{S} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{R})$

Bezeichnung Die gröbste Topologie $\mathbb{T}$ auf $\mathfrak{R}$ mit $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$ heißt die *„von $\mathbb{S}$ erzeugte Topologie“.*

1. Fall $\mathbb{S} = \emptyset$: Die erzeugte Topologie ist $\{\emptyset, \mathfrak{R}\}$.

2. Fall $\mathbb{S} \neq \emptyset$: Für $S \in \mathbb{S}$ ist $\mathbb{T}_S := \{\emptyset, S, \mathfrak{R}\}$ eine Topologie auf $\mathfrak{R}$. Die gesuchte Topologie ist offenbar gerade das Supremum der Topologien $\mathbb{T}_S$ $(S \in \mathbb{S})$. Nach (4.4.1 a') ist $\mathbb{S}$ eine *Subbasis* dazu.

4.5 Finale Topologien

Ein weiteres wichtiges Verfahren, um aus gegebenen topologischen Räumen neue zu bilden.

Es seien F, I nichtleere Mengen und für $i \in I$
$(E_i, \mathbb{O}_i)$ TRe, $f_i \colon E_i \longrightarrow F$ $\quad(\mathbb{O}_i \longmapsto \mathbb{U}^i)$

Gesucht ist hier eine Topologie $\mathbb{O}$ im Zielbereich F derart, daß die gegebenen Abbildungen f_i stetig werden. Vergröbert man eine solche Topologie, so sind die Abbildungen f_i erst recht stetig. Deshalb wählt man $\mathbb{O}$ maximal, d. h. gerade als *feinste* Topologie, die dies leistet:

$$\mathbb{O} := \{O \mid O \subset F \wedge \forall i \in I \quad f_i^{-1}(O) \in \mathbb{O}_i\}$$

Satz 4.5.1

a) $(F, \mathbb{O})$ *ist ein TR.* $\quad$ *($\mathbb{O}$ „finale Topologie“ auf F)*

b) $\mathbb{O}$ *ist die feinste Topologie auf F derart, daß alle f_i stetig sind.*

c) Für einen TR $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ und eine Abbildung $f \colon F \longrightarrow \mathfrak{S}$ gilt:
$f \colon (F, \mathbb{O}) \longrightarrow (\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *stetig* $\iff$ $\forall i \in I \; f \circ f_i \colon E_i \longrightarrow \mathfrak{S}$ *stetig*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] & \mathfrak{S} \\ E_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, dashed, "f \circ f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis: a): $\square\square\square$

b): Es sei $\mathbb{T}$ eine Topologie auf F:
$\forall i \in I \; f_i \colon E_i \longrightarrow (F, \mathbb{T})$ stetig $\iff \forall i \in I \; \forall O \in \mathbb{T} \; f_i^{-1}(O) \in \mathbb{O}_i$
$\iff \mathbb{T} \subset \mathbb{O}$

c): $\Longrightarrow$: nach b);
$\Longleftarrow$: Für $T \in \mathbb{T}$ und $i \in I$ gilt:
$f_i^{-1}(f^{-1}(T)) = (f \circ f_i)^{-1}(T) \in \mathbb{O}_i$, also $f^{-1}(T) \in \mathbb{O}$ $\square$

Als Spezialfall gehen wir allein auf die **Quotienten-Topologie** ein.

Es seien $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ ein TR und ϱ eine *Äquivalenzrelation*[*] auf $\mathfrak{R}$.

$$\varrho(a) := \{b \in \mathfrak{R} : (a,b) \in \varrho\} \quad \text{„\textit{Äquivalenzklasse} (zu } a\text{)“} \quad (a \in \mathfrak{R})$$
$$\mathfrak{R}/_{\varrho} := \{\varrho(a) : a \in \mathfrak{R}\},$$
$$\pi \colon \mathfrak{R} \ni a \longmapsto \varrho(a) \in \mathfrak{R}/_{\varrho} \quad \text{„\textit{(kanonische) Projektion}“}$$
$$\mathbb{O}(\varrho) := \left\{Q \subset \mathfrak{R}/_{\varrho} : \pi^{-1}(Q) \in \mathbb{O}\right\}$$

Nach (4.5.1) hat man:

Bemerkung 4.5.2

a) $\left(\mathfrak{R}/_{\varrho}, \mathbb{O}(\varrho)\right)$ *ist ein TR.* $\quad$ *(„(topologischer) Quotientenraum“;*
$\mathbb{O}(\varrho)$ *„Quotiententopologie“)*

b) $\mathbb{O}(\varrho)$ *ist die feinste Topologie auf $\mathfrak{R}/_{\varrho}$ derart, daß π stetig ist.*

c) $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $f \colon \mathfrak{R}/_{\varrho} \longrightarrow \mathfrak{S}$*:* $\; f$ *stetig* $\iff$ $f \circ \pi$ *stetig*

Als weitere Spezialfälle erwähnen wir nur **Summen-Topologie** und **Infimum von Topologien**.

[*] $\varrho \subset \mathfrak{R}^2$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv

Kapitel 5

Weitere Filetstücke

5.1 Uniform boundedness principle, Satz von Banach-Steinhaus

Wie üblich sei wieder $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Satz 5.1.1 (von der gleichmäßigen Beschränktheit; Uniform boundedness principle – UBP)

Vor.: *I nichtleere Menge,* $\big(E, \|\ \|\big)$ *$\mathbb{K}$-BR,* $\big(E_i, \|\ \|_i\big)$ *$\mathbb{K}$-NVR,*
$T_i \in L(E, E_i) \quad (i \in I)$,
$\forall\, x \in E \ \ \big\{\|T_i\, x\|_i : i \in I\big\}$ *beschränkt*

Beh.: $\big\{\|T_i\| : i \in I\big\}$ *ist beschränkt.*

Anmerkung: Die Vollständigkeit von $\big(E, \|\ \|\big)$ ist wesentlich.

Beweis: Für $i \in I$ sei $f_i \colon E \ni x \longmapsto \|T_i\, x\|_i \in [0, \infty[$ $\big($stetig, da T_i und $\|\ \|_i$ stetig$\big)$. Nach (4.1.3) und (4.1.5) existieren $a \in E$ und $\varepsilon, M \in\,]0, \infty[$ derart, daß

$$\forall\, i \in I \quad \forall\, x \in U_a^\varepsilon \quad \|T_i\, x\|_i \;=\; f_i(x) \le M\,.$$

Ist $y \in E$ mit $\|y\| < 1$, dann gilt $a + \varepsilon\, y \in U_a^\varepsilon$, also für $i \in I$:
$\varepsilon\, \|T_i\, y\|_i \;=\; \|T_i(a + \varepsilon\, y) - T_i\, a\|_i \le \|T_i(a + \varepsilon\, y)\|_i + \|T_i\, a\|_i \le 2\, M$;
somit $\|T_i\| \le \frac{2M}{\varepsilon}\ (i \in I)$. $\square$

Folgerung 5.1.2

> *Vor.:* I *nichtleere Menge,* $(E, \| \ \|)$ $\mathbb{K}$*-BR,* $x_i' \in E'$ $(i \in I)$ *so, daß* $\{|x_i' x| : i \in I\}$ *für alle* $x \in E$ *beschränkt ist.*
>
> *Beh.:* $\{\|x_i'\| : i \in I\}$ *ist beschränkt.*

Beweis: ✓

Folgerung 5.1.3

> *Vor.:* I *nichtleere Menge,* $(E, \| \ \|)$ $\mathbb{K}$*-NVR,* $x_i \in E$ $(i \in I)$ *so, daß* $\{|x' x_i| : i \in I\}$ *für alle* $x' \in E'$ *beschränkt ist.*
>
> *Beh.:* $\{\|x_i\| : i \in I\}$ *ist beschränkt.*

Beweis: (5.1.2) anwenden auf E' und $\varkappa x_i \in E''$ $(i \in I)$ ((2.4.1) beachten!) □

Satz 5.1.4 (Banach-Steinhaus)

> *Vor.:* $(E_\nu, \| \ \|_\nu)$ $\mathbb{K}$*-BR* $(\nu = 1, 2)$; $T_n \in L(E_1, E_2)$ $(n \in \mathbb{N})$;
> $M \subset E_1$ *so, daß* $\langle M \rangle$ *dicht in* E_1 *ist.*
>
> *Beh.:* ① $\forall\, x \in E_1$ $(T_n x)$ *konvergent*
>
> $\Updownarrow$
>
> ② $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ *beschränkt* $\wedge$ $\forall\, u \in M$ $(T_n u)$ *konvergent*

Zusatz 5.1.5 *Falls* ① *und* $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ $(x \in E_1)$: $T \in L(E_1, E_2)$

Beweis: ① $\Longrightarrow$ ②: $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ ist nach (5.1.1) beschränkt.

② $\Longrightarrow$ ①: $\forall\, u \in M$ $(T_n u)$ konvergent $\overset{\checkmark}{\Longrightarrow}$ $\forall\, z \in \langle M \rangle$ $(T_n z)$ konvergent;
es sei $K \in]0, \infty[$ so, daß $\|T_n\| \le K$ $(n \in \mathbb{N})$. Zu $x \in E_1$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $z \in \langle M \rangle$ mit $\|z - x\|_1 < \frac{\varepsilon}{4K}$, weiter existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_m z - T_n z\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \ge N$:

$$\begin{aligned}\|T_n x - T_m x\|_2 &\le \|T_n x - T_n z\|_2 + \|T_n z - T_m z\|_2 + \|T_m z - T_m x\|_2\\ &\le \|T_n\|\,\|x - z\|_1 + \qquad \shortparallel \qquad + \|T_m\|\,\|x - z\|_1\\ &\le K \cdot \|x - z\|_1 + \qquad \shortparallel \qquad + K \cdot \|x - z\|_1 \quad < \varepsilon;\end{aligned}$$

also ist $(T_n x)$ eine CF und damit konvergent. □

Beweis des Zusatzes: $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$: ✓
Für $x \in E_1$ (und K wie oben):

$$\|Tx\|_2 \longleftarrow \|T_n x\|_2 \le \|T_n\|\,\|x\|_1 \le K\,\|x\|_1 ,$$

also $\|T\| \le K$. □

Neben dem im folgenden dargestellten Anwendungsbeispiel hat (5.1.4) viele weitere wichtige Anwendungen: z. B. Fourier-*Entwicklung* (man vergleiche dazu etwa Wloka, Seite 124 f) und (schwach-) *holomorphe BR-wertige Funktionen.*

Anwendungsbeispiel:
„Quadraturformeln"; Numerische Integration

Es seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. *Gesucht:* $\int_a^b f(x)\,dx$

Das ‚Standard-Verfahren' $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ für eine Stammfunktion F von f ist recht *häufig nicht* (numerisch) *brauchbar oder nicht angemessen*; sei es, weil die explizite ‚Berechnung' von F nicht gelingt, sei es, weil F sich nicht als elementare und nicht im benötigten Umfang ‚tabellierte' Funktion herausstellt, sei es aber auch, weil die Bestimmung und Auswertung von F einen solchen *Aufwand* verursacht, daß man nach bequemeren Verfahren suchen wird. Dieser letzte Fall tritt häufig bereits bei der *Integration rationaler Funktionen* auf. Aufgrund der Charakterisierung des Riemann-Integrals läßt sich $i(f) := \int_a^b f(x)\,dx$ beliebig genau durch eine endliche Linearkombination von Funktionswerten

$$\sum_{\kappa=0}^{k} \lambda_\kappa f(x_\kappa)$$

(mit $x_\kappa \in [a, b]$) approximieren. In der numerischen Mathematik werden Näherungsformeln dieser Art hergeleitet und ihre Eigenschaften untersucht. Die Verwendung solcher Formeln ist auch noch sinnvoll, *wenn die Funktion nur an bestimmten Stellen* x_k — etwa aufgrund von Messungen oder als numerische Lösung einer Differentialgleichung — *bekannt ist.*

Bezeichnung Es seien $n \in \mathbb{N}_0$, $x_\nu \in [a, b]$ paarweise verschieden und $\lambda_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 0, \ldots, n$. Dann heißt das durch

$$q(f) := \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) \qquad \left(f \in C^{\mathbb{R}}[a, b]\right)$$

definierte Funktional q *„Quadraturformel" („n-ter Ordnung")* mit den *„Stützstellen"* x_ν und den *„Gewichten"* λ_ν. Eine Folge (q_k) von Quadraturformeln heißt *„Quadraturverfahren"*, wenn die Folge der zugehörigen Ordnungen isoton ist.

Satz 5.1.6 (SZEGÖ)

Vor.: Es seien (q_k) *ein Quadraturverfahren und dazu* $\lambda_0^{(k)}, \dots, \lambda_{n_k}^{(k)}$ *die Gewichte von* q_k *für* $k \in \mathbb{N}$.

Beh.:
$$\forall f \in C^{\mathbb{R}}[a,b] \quad q_k(f) \longrightarrow i(f) \quad (k \longrightarrow \infty)$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \forall m \in \mathbb{N}_0 \quad q_k(\mathbb{x}^m) \longrightarrow i(\mathbb{x}^m) \quad (k \longrightarrow \infty) \\ \wedge \ \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\nu=0}^{n_k} |\lambda_\nu^{(k)}| \ < \ \infty \end{cases}$$

Beweis: Nach dem Satz von WEIERSTRASS erfüllt $M := \{\mathbb{x}^m : m \in \mathbb{N}_0\}$ die Voraussetzung von (5.1.4) $\bigl($mit $E_1 := (C^{\mathbb{R}}[a,b], \| \ \|_s)\bigr)$. Nach (5.1.4) genügt daher *zu zeigen:*

$\|q\| = \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|$ für eine Quadraturformel $q(f) := \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) \ (\dots)$.

$\leq$: ✓

$\geq$: Es existiert ein $f \in C^{\mathbb{R}}[a,b]$ mit $\|f\|_s = 1$ und $f(x_\nu) = \operatorname{sign}\lambda_\nu$ (✓);
damit $q(f) = \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|$.

$\bigl($Noch beachten: $i \in (C^{\mathbb{R}}[a,b])'\bigr)$ □

Folgerung 5.1.7 (STEKLOV)

Sind in (5.1.6) *alle Gewichte* $\lambda_j^{(k)}$ *nichtnegativ, dann gilt:*
$$\forall f \in C^{\mathbb{R}}[a,b] \quad q_k(f) \longrightarrow i(f) \quad (k \longrightarrow \infty)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \quad q_k(\mathbb{x}^m) \longrightarrow i(\mathbb{x}^m) \quad (k \longrightarrow \infty)$$

Beweis:
$$\sum_{j=0}^{n_k} |\lambda_j^{(k)}| = \sum_{j=0}^{n_k} \lambda_j^{(k)} = q_k(\mathbb{x}^0) \longrightarrow i(\mathbb{x}^0) = b-a \quad (k \longrightarrow \infty)$$ □

Anmerkungen:

① Ist q eine Quadraturformel (von o. a. Typ) mit $q(\mathbb{x}^0) = i(\mathbb{x}^0)$, dann gilt $\|i - q\| \geq b - a$. Eine *gleichmäßige Approximation* durch solche Quadraturformeln ist also *nicht* möglich.

Beweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in C^{\mathbb{R}}[a,b]$ mit $g(x_\nu) = \operatorname{sign}\lambda_\nu$, $\|g\| \leq 1$ und $|i(g)| \leq \varepsilon$ (✓): □□□ □

② Durch die Forderung $q(P) = i(P)$ für alle Polynome P mit Grad $\leq n$ wird *bei vorgegebenen Stützstellen* eindeutig eine Quadraturformel (von o. a. Typ) n-ter Ordnung bestimmt. ($\rightsquigarrow$ *„interpolatorische"* Quadraturformel) [z. B. mit LAGRANGE-Darstellung von P]

③ Für NEWTON-COTES-Formeln (in ② äquidistante Stützstellen) ist (5.1.6) *nicht anwendbar* (Gegenbeispiel von POLYA). Für GAUSS-*Formeln* sind Gewichte nichtnegativ (also (5.1.7) *anwendbar*).

5.2 Open mapping principle; closed graph theorem

Satz 5.2.1 von der offenen Abbildung; open mapping principle

Vor.: $(E_\nu, \| \ \|_\nu)$ $\mathbb{K}$-*BR* $(\nu = 1, 2)$, $A \in L(E_1, E_2)$ *mit* $AE_1 = E_2$

Beh.: A *ist offen.*

Beweis: Mit $S_n := \{x \in E_1 : \|x\|_1 < 2^{-n}\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen wir zunächst:

a): Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\{y \in E_2 : \|y\|_2 < \varepsilon\} \subset A S_0$:

Aus $AE_1 = E_2$ und $E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} k S_1$ folgt $E_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} k A S_1$. E_2 ist von 2. Kategorie $\bigl($nach (4.1.4)$\bigr)$, daher existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \overset{\circ}{\overline{AS_1}} \overset{(2.1.3.\beta)}{=} \overset{\circ}{\overline{kAS_1}} \neq \emptyset$; somit existieren ein $p \in E_2$ und ein $\eta \in]0, \infty[$ mit $\{y \in E_2 : \|y - p\|_2 < \eta\} \subset \overline{AS_1}$; dann

$\{z \in E_2 : \|z\|_2 < \eta\} \subset \overline{AS_1} - p \subset \overline{AS_1} - \overline{AS_1} \overset{-\ \text{stetig}}{\subset} \overline{AS_1 - AS_1} \subset \overline{AS_0}$.
Daher — wieder mit (2.1.3.β) —
$$\{v \in E_2 : \|v\|_2 < \eta \cdot 2^{-n}\} \subset \overline{AS_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1}$$

Behauptung: $\varepsilon := \eta/2$ tut's: Zu $y \in E_2$ mit $\|y\|_2 < \eta/2$ existiert nach (1) ein $x_1 \in S_1$ mit $\|y - Ax_1\|_2 < \eta 2^{-2}$, dazu existiert dann $\bigl($wieder nach (1)$\bigr)$ ein $x_2 \in S_2$ so, daß $\|(y - Ax_1) - Ax_2\|_2 < \eta 2^{-3}$ und (induktiv) für $n \in \mathbb{N}$: $x_n \in S_n$ derart, daß
$$\Bigl\| y - \sum_{\nu=1}^{n} A x_\nu \Bigr\|_2 < \eta 2^{-(n+1)} \tag{2}$$

Da $\|x_\nu\|_1 < 2^{-\nu}$ gilt und $(E_1, \| \ \|_1)$ BR ist, hat man die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu =: x$ mit $x \in S_0$ und $Ax = \sum_{\nu=1}^{\infty} A x_\nu \overset{(2)}{=} y$.

b): Es seien nun $E_1 \supset O$ offen und $b \in AO$: Zu einem $a \in O$ mit $b = Aa$ existiert ein $0 < \delta < \infty$ so, daß $\underbrace{\{x \in E_1 : \|x - a\|_1 < \delta\}}_{= \delta S_0 + a} \subset O$; mit ε gemäß a):

$$\mathbb{U}_b^{(2)} \ni \left\{v \in E_2 : \|v\|_2 < \delta\,\varepsilon\right\} + b \,\subset\, A(\delta S_0 + a) \,\subset\, AO\,.$$

□

Satz 5.2.2 vom inversen Operator

Vor.: $\left(E_\nu, \|\;\|_\nu\right)$ $\mathbb{K}$-*BR* $(\nu = 1,2)$, $T \in L(E_1, E_2)$ *bijektiv*

Beh.: T^{-1} *ist stetig, also* T *ein (NVR-) Isomorphismus.*

Beweis: nach (5.2.1) ist T offen (und bijektiv, stetig), also (□□□) T^{-1} stetig. □

Folgerung 5.2.3

Vor.: $\left(E, \|\;\|_\nu\right)$ $\mathbb{K}$-*BR* $(\nu = 1,2)$, $\alpha \in]0, \infty[\,,\ \ \|\;\|_2 \le \alpha \|\;\|_1$

Beh.: $\|\;\|_1$ *und* $\|\;\|_2$ *sind äquivalent.*

Beweis: (5.2.2) anwenden auf $T := \mathrm{id}_E$: Die Stetigkeit von

$$\mathrm{id} = \mathrm{id}^{-1} : \left(E, \|\;\|_2\right) \longrightarrow \left(E, \|\;\|_1\right)$$

zeigt $\|x\|_1 = \|\mathrm{id}\,x\|_1 \le \|\,\mathrm{id}\,\|\,\|x\|_2$ für $x \in E$. □

Sind $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$, $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ TRe und $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$, dann betrachten wir mit

$$G(f) \;:=\; \left\{\left(x, f(x)\right) : x \in \mathfrak{R}\right\} \quad \text{den „Graphen (von } f\text{)“.}$$

f heißt *„Graphen-abgeschlossen“*: $\iff$ $G(f)$ abgeschlossen (in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$)

Bemerkung 5.2.4 $\mathfrak{S}$ *HdR* $\wedge$ f *stetig* $\Longrightarrow$ f *Graphen-abgeschlossen*

Beweis: Ist $(a, b) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \setminus G(f)$, also $b \neq f(a)$, dann existieren ein $V_1 \in \mathbb{U}_b$ und ein $V_2 \in \mathbb{U}_{f(a)}$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$: Es existiert dazu ein $U \in \mathbb{U}_a$ mit $f(U) \subset V_2$, dann $\mathbb{U}_{(a,b)} \ni U \times V_1 \subset \mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \setminus G(f)$. □

Es seien jetzt $\left(E_\nu, \|\;\|_\nu\right)$ $\mathbb{K}$-NVRe $(\nu = 1,2)$ und $T : E_1 \longrightarrow E_2$.

Bemerkung 5.2.5

T Graphen-abgeschlossen

$\Updownarrow$

$\forall\, (x_n) \in E_1^{\mathbb{N}}\ \forall\, x \in E_1\ \forall\, y \in E_2\ \left[x_n \longrightarrow x \;\wedge\; Tx_n \longrightarrow y\right] \Longrightarrow Tx = y$

Beweis: Für $(x, y) \in E_1 \times E_2$:

$$(x, y) \in \overline{G(T)} \iff \exists\left((x_n, y_n)\right) \in G(T)^{\mathbb{N}} \quad (x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$$
$$\iff \exists\,(x_n) \in E_1^{\mathbb{N}}\ x_n \longrightarrow x \;\wedge\; Tx_n \longrightarrow y$$

Hieraus liest man die Behauptung ab. □

Anmerkung *Ist T nicht stetig, dann kann eine Folge $(x_n) \in E_1^{\mathbb{N}}$ konvergent sein, ohne daß die Folge der Bilder (Tx_n) konvergent ist:*

Beispiel $E_1 := E_2 := \mathbb{R}$ $\left(\text{mit } |\;| \text{ wie üblich}\right)$,

$$Tx := \left\{\begin{matrix} \frac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{matrix}\right\}, \quad x_n := \frac{1}{n} \ \ (n \in \mathbb{N});$$

T ist *Graphen-abgeschlossen*, jedoch *nicht stetig*. Zudem ist T nicht ‚abgeschlossen‘ in dem Sinne, daß abgeschlossene Mengen jeweils abgeschlossene Bilder haben: Dies zeigt etwa: $T\big([1, \infty[\big) =]0, 1]$ ◁

Satz 5.2.6 vom abgeschlossenen Graphen
closed graph theorem

Vor.: $\left(E_\nu, \|\;\|_\nu\right)$ $\mathbb{K}$-*BR* $(\nu = 1,2)$, $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$

Beh.: $T \in L(E_1, E_2) \iff T$ *Graphen-abgeschlossen*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: nach (5.2.4)

„$\Longleftarrow$“: $G(T)$ ist ein $\mathbb{K}$-BR als abgeschlossener UR von $E_1 \times E_2$ $\left(E_1 \times E_2\right.$ ist ein $\mathbb{K}$-BR mit $\left.|||(x, y)||| := \|x\|_1 + \|y\|_2\right)$. Wir betrachten die

Abbildung $\varphi : G(T) \ni (x, Tx) \longmapsto x \in E_1$.

Diese ist linear, stetig und bijektiv; nach (5.2.2) ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : E_1 \ni x \longmapsto (x, Tx) \in G(T)$ stetig und somit auch T. □

Beispiel (man vergleiche Seite 22)

$E_1 := \mathrm{C}_1^{\mathbb{R}}[0,1]$, $E_2 := \mathrm{C}^{\mathbb{R}}[0,1]$; beide mit $\| \ \|_s$

$D\colon E_1 \ni f \longmapsto f' \in E_2$ *linear, nicht stetig*, aber *Graphen-abgeschlossen*:

$(f_n) \in E_1^{\mathbb{N}}$, $f \in E_1$, $g \in E_2$ so, daß $f_n \longrightarrow f \ \wedge \ f'_n \longrightarrow g \ \overset{\text{A I}}{\Longrightarrow} \ f' = g$

Dies steht nicht im Widerspruch zu (5.2.6), da $\big(E_1, \| \ \|_s\big)$ kein BR ist.

5.2.7 Es seien $\big(E, \| \ \|\big)$ ein $\mathbb{K}$-BR und E_ν *abgeschlossene URe* von E für $\nu = 1, 2$ mit

$$E = E_1 + E_2 \ \text{ und } \ E_1 \cap E_2 = \{0\}\,.$$

Für $x \in E$ *existieren* dann *eindeutig* $x_\nu \in E_\nu$ mit $x = x_1 + x_2$; die Abbildung

$$T\colon E_1 \times E_2 \ni (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2 \in E$$

ist daher (linear und) bijektiv.

Wegen $\|T(x_1,x_2)\| = \|x_1 + x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\|$ ist T auch stetig (bei 0); nach (5.2.2) ist somit T ein *(NVR-) Isomorphismus.*

5.2.8 Sind $\big(E, \| \ \|\big)$ ein $\mathbb{K}$-BR und $P\colon E \longrightarrow E$ ein *„Projektor“*, d. h.: $P \in L(E,E)$ mit $P^2 := P \circ P = P$, dann ist auch $Q := \mathrm{id}_E - P$ ein *Projektor*. Mit diesem gilt: $PQ = 0$, $P + Q = \mathrm{id}_E$ und $E_1 := PE$, $E_2 := QE$ erfüllen die Voraussetzung von (5.2.7).

$\big(E_1 = \text{Kern } Q,\ E_2 = \text{Kern } P$: abgeschlossen; Rest: $\square\square\square\big)$

5.3 Schwache Topologien; Satz von Alaoglu

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E = (E, a, s)$ ein $\mathbb{K}$-VR und $\varGamma \subset E^*$.

Gesucht ist die gröbste Topologie auf E derart, daß $\varphi\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig ist für alle $\varphi \in \varGamma$, also — man vergleiche Abschnitt 4.4 — gerade die zugehörige initiale Topologie. Wir bezeichnen diese als *„$\varGamma$-Topologie“* oder mit *„$\sigma(\varGamma)$“* oder genauer *„$\sigma(E, \varGamma)$“*.

Unmittelbar aus der Definition liest man ab:

$$\sigma(\varGamma) \ = \ \sigma(\langle \varGamma \rangle)$$

Bezeichnung $\varGamma$ *„total“* $: \iff \ \forall\, x \in E \setminus \{0\} \ \exists\, \varphi \in \varGamma \ \ \varphi x \neq 0$

Zusätzlich zu den allgemeinen Überlegungen aus Abschnitt 4.4 ist hier noch die ‚Linearität‘ zu berücksichtigen.

Für $p \in E$ und $U \subset E$ gilt — nach (4.4.1.c) —

U ist eine $\big(\sigma(\varGamma)\text{-}\big)$Umgebung von p genau dann, wenn $U \supset \bigcap\limits_{\varphi \in A} \varphi^{-1}(U_{\varphi p})$ mit $\varGamma \supset A$ endlich und $U_{\varphi p} \in \mathbb{U}^{\mathbb{K}}_{\varphi p}$ für $\varphi \in A$, also offenbar genau dann, wenn $U \supset \bigcap\limits_{\varphi \in A} \varphi^{-1}(U^\varepsilon_{\varphi p})$ mit $\varGamma \supset A$ endlich und $\varepsilon \in \,]0, \infty[\,$.

Für $\varGamma \supset A$ endlich, $\varepsilon \in \,]0,\infty[$ und $p \in E$:

$$\bigcap_{\varphi \in A} \varphi^{-1}(U^\varepsilon_{\varphi p}) \ = \ \big\{x \in E : \forall\, \varphi \in A \quad |\varphi x - \varphi p| < \varepsilon\big\} \ =: \ U(p; A, \varepsilon)$$

Für $x \in E$ gilt: $x \in U(p; A, \varepsilon) \iff \forall\, \varphi \in A \ \ \varphi x \in U^\varepsilon_{\varphi p}$

5.3.0 $U(p; A, \varepsilon) \ = \ U(0; A, \varepsilon) \ + \ p$

Die $\varGamma$-Topologie ist daher schon völlig bestimmt durch die *Umgebungsbasis von* 0:

$$\big\{U(0; A, \varepsilon) : \varGamma \supset A \text{ endlich}, \varepsilon \in \,]0, \infty[\big\}$$

Trivialität 5.3.1 *Für $\varGamma_1 \subset \varGamma_2 \subset E^*$: $\sigma(\varGamma_1) \subset \sigma(\varGamma_2)$*

Bemerkung 5.3.2 *Mit $\sigma := \sigma(\varGamma)$ gelten:*

α) $a\colon (E, \sigma) \times (E, \sigma) \longrightarrow (E, \sigma)$ ist stetig.

β) $s\colon \mathbb{K} \times (E, \sigma) \longrightarrow (E, \sigma)$ ist stetig.

γ) $\varGamma$ total $\Longrightarrow$ (E, σ) HdR

Beweis: Für $p, q \in E, \beta \in \mathbb{K}, \varGamma \supset A$ endlich und $\varepsilon > 0$:

α): $U(p; A, \varepsilon/2) + U(q; A, \varepsilon/2) \subset U(p + q; A, \varepsilon)$

β): Die Stetigkeit der Multiplikation in $\mathbb{K}$ liefert: Zu $\varphi \in A$ existiert $\eta = \eta(\varphi) > 0$ so, daß $U^\eta_\beta \cdot U^\eta_{\varphi p} \subset U^\varepsilon_{\beta \varphi p}$; da A endlich ist, existiert $\delta := \min\limits_{\varphi \in A} \eta(\varphi) > 0$; damit gilt: $\forall\, \varphi \in A \ \ U^\delta_\beta \cdot U^\delta_{\varphi p} \subset U^\varepsilon_{\beta \varphi p} = U^\varepsilon_{\varphi(\beta p)}$; das zeigt $U^\delta_\beta \cdot U(p; A, \delta) \subset U(\beta p; A, \varepsilon)\,.$

γ): Zu $p \neq q$ existiert $\varphi \in \varGamma$ mit $|\varphi p - \varphi q| = |\varphi(p - q)| =: 2\varepsilon > 0$, damit: $U\big(p; \{\varphi\}, \varepsilon\big) \cap U\big(q; \{\varphi\}, \varepsilon\big) \ = \ \emptyset$ $\square$

Bemerkung 5.3.3

Vor.: $x \in E$, $\mathbb{F}$ *FB auf* E
Beh.: $\mathbb{F} \longrightarrow x \ \ (\sigma(\Gamma)) \iff \forall\, \varphi \in \Gamma\ \ \varphi\mathbb{F} \longrightarrow \varphi x$

Dabei natürlich $\varphi\mathbb{F} := \varphi(\mathbb{F})$ (Bild von $\mathbb{F}$ unter φ).

Beweis: $\ell.\,S. \iff \mathbb{U}_x^\sigma \leq \mathbb{F} \iff \forall\, U \in \mathbb{U}_x^\sigma\ \exists\, F \in \mathbb{F}\ \ F \subset U$

$\iff \forall\, A$ (endlich, $\subset \Gamma$) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, F \in \mathbb{F}\ \ F \subset U(x; A, \varepsilon)$

$\overset{\checkmark}{\iff} \forall\, \varphi \in \Gamma\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, F \in \mathbb{F}\ \ F \subset U\big(x; \{\varphi\}, \varepsilon\big)$

$\iff \forall\, \varphi \in \Gamma\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, F \in \mathbb{F}\ \ \varphi F \subset U_{\varphi x}^\varepsilon \iff r.\,S.$ □

Folgerung 5.3.4

Vor.: $x \in E$, $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$
Beh.: $x_n \longrightarrow x \ \ (\sigma(\Gamma)) \iff \forall\, \varphi \in \Gamma\ \varphi x_n \longrightarrow \varphi x$

Bemerkung 5.3.5 *Vor.:* $\big(E, \|\ \|\big)$ $\mathbb{K}$-*NVR*

Beh.: α) E' *ist total.*

β) $\varkappa E$ *ist total.* (*für* E')

γ) $\sigma(E, E') \subset \mathbb{O}(\|\ \|)$

Beweis: α): nach (2.3.5.b) β): trivial

γ): $\varphi \in E'$ bedeutet gerade $\big(\varphi \in E^*$ und$\big)$ $\varphi\colon \big(E, \mathbb{O}(\|\ \|)\big) \longrightarrow \big(\mathbb{K}, |\ |\big)$ stetig, also folgt die Behauptung nach Definition von $\sigma(E, E')$. □

Bezeichnung Ist $\big(E, \|\ \|\big)$ ein $\mathbb{K}$-NVR, dann bezeichnet man

$\mathbb{O}(\|\ \|)$ als *„Norm-Topologie"* oder *„starke Topologie"*,

$\sigma(E, E')$ als *„schwache Topologie"* und

$\sigma(E', E) := \sigma(E', \varkappa E)$ als *„E-Topologie"* oder *„schwach∗-Topologie"*.

Nach (5.3.1) und (5.3.5.γ) hat man:

5.3.6 $\sigma(E', E) \ \subset\ \sigma(E', E'') \ \subset\ \underbrace{\mathbb{O}(\|\ \|)}_{\textit{Operatornorm}}$

Nach (5.3.5) ist (in einem NVR) insbesondere *jede stark konvergente Folge auch schwach konvergent. Die Umkehrung gilt i. a. nicht:*

Beispiel Wir betrachten den Raum ℓ_2 $\big($mit der Norm $\|\ \|_2\big)$ und darin die Vektoren $\mathfrak{e}_n := (\delta_{j,n})_{j \in \mathbb{N}}$ $\big(n \in \mathbb{N}\big)$. Dann gilt $\|\mathfrak{e}_n - \mathfrak{e}_m\|_2 = \sqrt{2}$ für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Für $\varphi \in \ell_2'$ existiert ein $a = (a_n) \in \ell_2$ mit $\varphi z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j z_j$ für $z = (z_n) \in \ell_2$, folglich

$\varphi\,\mathfrak{e}_n = a_n \longrightarrow 0 \ \ (n \longrightarrow \infty)$. ◁

Satz 5.3.7

$$\boxed{\langle\, \Gamma \,\rangle \ = \ \big\{\varphi \in E^* \,|\, \varphi\colon \big(E, \sigma(\Gamma)\big) \longrightarrow \mathbb{K} \textit{ stetig}\big\}}$$

Nach der Definition von $\sigma(\Gamma)$ hat man $\Gamma \subset \{\ldots\}$, also auch $\langle\, \Gamma \,\rangle \subset \{\ldots\}$. Für die andere Inklusion zeigen wir zunächst den

Hilfssatz 5.3.8

Vor.: $n \in \mathbb{N}$; $g, f_1, \ldots, f_n \in E^*$; $g \notin \big\langle f_1, \ldots, f_n \big\rangle$
Beh.: Es existiert ein $a \in E$ *mit* $g(a) = 1$ *und* $f_1(a) = \cdots = f_n(a) = 0$.

Beweis (des Hilfssatzes): *Sonst* $\bigcap\limits_{\nu=1}^{n} \operatorname{Kern} f_\nu \ \subset\ \operatorname{Kern} g$ ①

Wir betrachten die Abbildung

$$T\colon E \ni x \longmapsto (f_1 x, \ldots, f_n x)^T \in \mathbb{K}^n;$$

nach ① hat man für $v, w \in E$:

$$Tv = Tw \implies gv = gw$$

Daher wird durch $\psi(Tx) := gx$ für $x \in E$ auf dem UR *TE* von $\mathbb{K}^n$ eine $\mathbb{K}$-wertige Abbildung ψ definiert, die offenbar *linear* ist. Zu ψ existiert eine Fortsetzung $\varphi \in (\mathbb{K}^n)^*$ (✓) und dazu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{K}^n$ derart, daß $\varphi z = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu z_\nu$ für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$. Für $x \in E$ hat man also $gx = \psi(Tx) = \varphi(Tx) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu f_\nu(x)$ im Widerspruch zu $g \notin \big\langle f_1, \ldots, f_n \big\rangle$. □

Beweis von (5.3.7; „$\supset$"): Für $\varphi \in r.\,S.$ existieren, da φ stetig ist mit $\varphi 0 = 0$, $\Gamma \supset A$ endlich und $\delta > 0$ so, daß

$$\varphi U(0; A, \delta) \subset U_0^1 . \qquad ②$$

Für $x \in \bigcap_{\psi \in A} \operatorname{Kern} \psi$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt $mx \in U(0; A, \delta)$, also $m|\varphi x| = |\varphi(mx)| < 1$ nach ②; somit $\varphi x = 0$. Nach dem Hilfssatz folgt $\varphi \in \langle A \rangle \quad \big(\subset \langle \Gamma \rangle\big)$. □

Beziehung zur Produkttopologie

5.3.9 Es sei Γ eine *totale* Teilmenge von E^*; dazu betrachten wir
$\mathfrak{S} = \prod_{\Gamma} \mathbb{K} = \mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{K})$ (mit Produkttopologie $\mathbb{P}$) *und*
$\tau \colon E \longrightarrow \mathfrak{S}$, definiert durch $(\tau x)(\varphi) := \varphi x \quad (x \in E, \varphi \in \Gamma)$.
Dann gelten:

a) $\mathfrak{S}$ ist ein $\mathbb{K}$-VR und τ ein Monomorphismus.

b) Die Abbildung $\tau \colon \big(E, \sigma(\Gamma)\big) \longrightarrow \big(\tau E, \mathbb{P}_{\tau E}\big)$ ist topologisch.

Beweis: a) $\mathfrak{S}$ $\mathbb{K}$-VR und τ linear: ✓ τ ist injektiv, da Γ total ist.
b): nach der Definition von $\sigma(\Gamma)$ und der Produkttopologie (jeweils als entsprechende initiale Topologie) □□□ □

Lemma 5.3.10

Vor.: E $\mathbb{K}$-VR und $c \colon E \longrightarrow [0, \infty[$

Beh.: $\big\{f \in E^* : \forall\, x \in E \quad |f\,x| \le c(x)\big\}$ ist $\sigma(E^*, E)$-kompakt.

Beweis: Wir bezeichnen die Menge aus der Behauptung mit K. Für ein $x \in E$ ist die Menge $I(x) := \{z \in \mathbb{K} : |z| \le c(x)\}$ kompakt und nichtleer.
Nach dem Satz von TYCHONOFF ist auch $I := \prod_{x \in E} I(x)$ *kompakt* $\Big(\subset \prod_{E} \mathbb{K}\Big)$.

In (5.3.9) betrachten wir E^* an Stelle von E und fassen $\Gamma := E$ als (totale) Teilmenge von E^{**} auf; also $\mathfrak{S} = \prod_E \mathbb{K}$ (mit Produkttopologie).

Nach (5.3.9) ist $\tau_{/} \colon \big(K, \sigma(E^*, E)_K\big) \longrightarrow \big(\tau K, \mathbb{P}_{\tau K}\big)$ topologisch. Wir zeigen: *τK ist abgeschlossen in I* $\big($dann ist τK kompakt, also K $\sigma(E^*, E)$-kompakt$\big)$: Für $z \in E$ ist die Projektion $I \ni \varphi \longmapsto \varphi(z) \in I(z)$ stetig; daher sind für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in E$ die Mengen
$A(x, y) := \big\{\varphi \in I : \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)\big\}$ und
$B(\alpha, x) := \big\{\varphi \in I : \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)\big\}$ abgeschlossen. Damit ist auch $\tau K = \bigcap_{x,y \in E} A(x, y) \cap \bigcap_{\alpha \in \mathbb{K},\, x \in E} B(\alpha, x)$ abgeschlossen. □

Satz 5.3.11 von ALAOGLU

Vor.: E $\mathbb{K}$-NVR

Beh.: $\big\{x' \in E' : \|x'\| \le 1\big\}$ ist $\sigma(E', E)$-kompakt.

In Worten: Die Einheitskugel im Dualraum ist schwach $*$-kompakt.

Beweis: In (5.3.10) wählen wir $c := \|\ \|$; unter Beachtung von

$$\big\{x' \in E' : \|x'\| \le 1\big\} = \big\{f \in E^* : \forall\, x \in E \quad |f\,x| \le \|x\|\big\};$$

ist nach (5.3.10) die *ℓ. S.* $\sigma(E^*, E)$-kompakt. $\sigma(E', E) \overset{\checkmark}{=} \sigma(E^*, E)_{E'}$ liefert die Behauptung. □

Der Satz hat ein breites Spektrum von Anwendungen: So etwa in der Theorie der BANACH-Algebren und der Spektraltheorie hermitescher und unitärer Operatoren. In der Statistik wird er beispielsweise herangezogen für den Nachweis der Existenz eines optimalen α-Niveau-Tests für Testprobleme mit zusammengesetzter Hypothese und einfacher Alternative.

Folgerung 5.3.12

Vor.: E reflexiver $\mathbb{K}$-BR

Beh.: $\big\{x \in E : \|x\| \le 1\big\}$ ist schwach-kompakt.

Wir vermerken *ohne Beweis:* Die Umkehrung zu (5.3.12) gilt auch.

Es seien wieder E ein $\mathbb{K}$-VR und $\Gamma \subset E^*$.

Bezeichnung Für $M \subset E$:
M *„$\sigma(\Gamma)$-beschränkt"* $:\iff \forall\, \varphi \in \Gamma \ \varphi M$ beschränkt
$\Big(\overset{\checkmark}{\iff} \forall\, U \in \mathbb{U}_0^{\sigma(\Gamma)} \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \quad M \subset \lambda U\Big)$

5.3.13 *a) E $\mathbb{K}$-NVR und $M \subset E$: M beschränkt $\iff$ M schwach-beschränkt*
b) E $\mathbb{K}$-BR, $M \subset E'$: M beschränkt $\iff$ M schwach$*$-beschränkt

Beweis: „$\Longrightarrow$" (in a) und b)): ✓ a), „$\Longleftarrow$": (5.1.3) b), „$\Longleftarrow$": (5.1.2) □

Folgerung 5.3.14

Vor.: E $\mathbb{K}$-BR, $M \subset E'$

Beh.: M schwach$*$-kompakt $\iff$ M beschränkt $\wedge$ M schwach$*$-abgeschlossen

Beweis:

„$\Longrightarrow$“: M ist schwach $*$-abgeschlossen, da $\big($nach (5.3.2) und (5.3.5)$\big)$ $\big(E', \sigma(E', E)\big)$ ein HdR ist. Für $x \in E$ ist $\varkappa x \colon \big(E', \sigma(E', E)\big) \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig, also $\varkappa x M$ kompakt und somit beschränkt; nach (5.3.13.b) daher: M beschränkt

„$\Longleftarrow$“: Es existiert $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\|\frac{1}{n} M\| \le 1$ $\big($mit M ist auch $\frac{1}{n}M$ $\sigma(E', E)$-abgeschlossen$\big)$; mit (5.3.11): $\frac{1}{n}M$ (also auch M) $\sigma(E', E)$-kompakt □

Wir haben uns in diesem Abschnitt auf wenige exemplarische Überlegungen zu schwachen Topologien beschränkt. Dabei haben wir — aus didaktischen Gründen — (wie im gesamten funktionalanalytischen Teil) nur NVRe zugrundegelegt. Neben vielen wichtigen Anwendungen, in denen *‚topologische VRe‘* auftreten, die nicht (halb-)normierbar sind, sind auch die schwachen Topologien und Aussagen zu Produkträumen ein starkes Argument für die Beschäftigung mit allgemeinen (zumindest lokal-konvexen!) topologischen VRn!

„Du meine Güte! Was die Kinder heutzutage alles in der Schule lernen müssen! Die armen kleinen Gehirnchen! Mir wird ganz anders!“

Donald Duck

Viel Freude und Erfolg bei Ihrem weiteren Studium der Funktionalanalysis wünscht Ihnen

DIETER HOFFMANN