Kapitel 1

Die komplexen Zahlen

1.1 Historisches

Ein wichtiger Ausgangspunkt für die Entwicklung der komplexen Zahlen war das Auftreten des Symbols

$$\boxed{\sqrt{-1}}$$

in dem Werk *„Ars Magna“* (1545) von Geronimo Cardano (1501 - 1576). Das Problem war, zwei (reelle?) Zahlen x_1, x_2 mit $x_1+x_2 = 10$, $x_1 \cdot x_2 = 40$ zu finden, d. h. die quadratische Gleichung $x^2 - 10x + 40 = 0$ zu lösen. Formales Ausrechnen ergab $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-1}\sqrt{15}$, wobei Cardano Schwierigkeiten hatte, dem Symbol $\sqrt{-1}$ eine konkrete Bedeutung zu geben.

Auch bei der Lösung kubischer Gleichungen, reduziert auf die spezielle Form $x^3 + px + q = 0$, trat $\sqrt{-1}$ auf. Die Substitution $x = u + v$ ergibt

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0\,.$$

Diese Gleichung ist sicher erfüllt, wenn $u^3 + v^3 = -q$, $3uv = -p$ gilt. Wegen $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$ folgt dann

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

bzw.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,.$$

Kennt man eine Lösung u bzw. v dieser beiden Gleichungen mit $u\,v = -p/3$, so erhält man mit Hilfe der dritten Einheitswurzel $\omega := \frac{1}{2}\big(-1 + \sqrt{-1}\sqrt{3}\big)$ durch die sogenannten *Cardanischen Formeln*

$$x_1 = u + v\,,\ x_2 = u\,\omega + v\,\omega^2,\ x_3 = u\,\omega^2 + v\,\omega$$

die Lösungen x_1, x_2, x_3 der kubischen Gleichung.

Rafael Bombelli (1526 - 1572) fand so für die Gleichung $x^3 - 15x - 4 = 0$ auf dem Umweg über die komplexen Zahlen

$$u \;=\; \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \;=\; 2 + \sqrt{-1}\,, \quad v \;=\; \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \;=\; 2 - \sqrt{-1}$$

die *reellen* Lösungen $x_1 = 4,\ x_2 = -2 - \sqrt{3},\ x_3 = -2 + \sqrt{3}\,.$

Leonhard Euler (1707 - 1783) führte für die *imaginäre Einheit* $\sqrt{-1}$ die heute übliche Schreibweise

$$\boxed{i}$$

ein und stellte im Jahre 1748 über die Beziehung

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

einen Zusammenhang zwischen den wichtigsten elementaren Funktionen her.

Dies alles förderte eine zunehmende Akzeptanz der komplexen Zahlen. Man rechnete mit ihnen, ohne daß die Rechenregeln begründet waren, wie mit den reellen Zahlen und begnügte sich damit, die Ergebnisse nachträglich zu verifizieren.

Caspar Wessel (1745 - 1818) und Jean-Robert Argand (1768 - 1822) brachten im Jahre 1797 bzw. 1806 erste *Begründungen auf geometrischem Wege* für das Rechnen mit komplexen Zahlen. Unabhängig davon führte Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) im Jahre 1811 die nach ihm benannte Gaußsche Zahlenebene ein. Endgültige Anerkennung fanden die komplexen Zahlen durch die rein arithmetische Begründung als geordnete Paare reeller Zahlen durch William Rowan Hamilton (1805 - 1865) im Jahre 1835, wie man sie heute — als einfache konkrete mathematische Objekte — meist schon in den Grundvorlesungen im ersten Semester kennenlernt.

Die Schwierigkeiten, die die Mathematiker *früher* mit den komplexen Zahlen hatten, zeigen sich noch in den Bezeichnungen *„komplex“* und *„imaginär“*. Man vergleiche hierzu etwa Euler, „Vollständige Anleitung zur Algebra“, Kapitel 13:

> *„Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als 0, oder etwa 0 selbst sind, so ist klar, daß die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht einmal zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, daß dies unmögli-*

che Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre *oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung vorhanden sind.“*

Auch in die nicht-mathematische Literatur hat dies vielfältig Eingang gefunden. Ein Beispiel dazu aus Robert Musil, „Die Verwirrungen des Zöglings Törleß“:

„ ... Ja. Das ist doch gar nicht so schwer. Man muß nur festhalten, daß die Quadratwurzel aus negativ Eins die Rechnungseinheit ist.“
„Das ist es aber gerade. Die gibt es doch gar nicht. Jede Zahl, ob sie nun positiv ist oder negativ, gibt zum Quadrat erhoben etwas Positives. Es kann daher gar keine wirkliche Zahl geben, welche die Quadratwurzel von etwas Negativem wäre.“
„Ganz recht; aber warum sollte man nicht trotzdem versuchen, auch bei einer negativen Zahl die Operation des Quadratwurzelziehens anzuwenden? Natürlich kann dies dann keinen wirklichen Wert ergeben, und man nennt doch auch deswegen das Resultat nur ein imaginäres. Es ist so, wie wenn man sagen würde: hier saß sonst immer jemand, stellen wir ihm also auch heute einen Stuhl hin; und selbst wenn er inzwischen gestorben wäre, so tun wir doch, als ob er käme.“

....

„Wie soll ich das ausdrücken? Denk doch nur einmal so daran: In solch einer Rechnung sind am Anfang ganz solide Zahlen, die Meter oder Gewichte oder irgend etwas anderes Greifbares darstellen können und wenigstens wirkliche Zahlen sind. Am Ende der Rechnung stehen ebensolche. Aber diese beiden hängen miteinander durch etwas zusammen, das es gar nicht gibt. Ist das nicht wie eine Brücke, von der nur Anfangs– und Endpfeiler vorhanden sind und die man dennoch so sicher überschreitet, als ob sie ganz dastünde? Für mich hat so eine Rechnung etwas Schwindliges: als ob es ein Stück des Weges weiß Gott wohin ginge. Das eigentlich Unheimliche ist mir aber die Kraft, die in solch einer Rechnung steckt und einen so festhält, daß man doch wieder richtig landet.“

Schnell stellte sich — nach dem zögernden Beginn — heraus, daß das Rechnen mit komplexen Zahlen sehr oft auch wertvolle *reelle* Ergebnisse lieferte, und zwar sowohl neue als auch schon bekannte, letztere oft auf eleganterem Weg; zudem wurde manche reelle Aussage erst durch die Einbeziehung komplexer Zahlen ‚wirklich‘ verstanden.

1.2 Definition und Modelle komplexer Zahlen

Im Folgenden werden wir verschiedene Modelle für komplexe Zahlen kennenlernen. Mithin ist es zunächst nicht korrekt, von *den* komplexen Zahlen zu sprechen. Diese Modelle stimmen jedoch im wesentlichen überein. Genauer bedeutet dies:

Ein Körper der komplexen Zahlen ist ein kommutativer Körper, der die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Teilkörper enthält, in dem ein Element i mit $i^2 = -1$ existiert, und dessen Elemente sich alle in der Form $a + ib$ mit reellen Zahlen a, b schreiben lassen. Für Mathematiker: Ein (kommutativer) Körper $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt genau dann *„Körper der komplexen Zahlen“*, wenn

(1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, präziser ‚bis auf Isomorphie‘

(2) Es existiert $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.

(3) $\mathbb{C} = \{a + ib : \; a, b \in \mathbb{R}\} \; =: \; \mathbb{R} + i\mathbb{R}$

‚Bis auf Isomorphie‘ bedeutet: Es existiert $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ injektiv mit:

$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$. („*Einbettung*“)

Es folgen offenbar $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$.

Elemente aus $\mathbb{C}$ heißen *„komplexe Zahlen“*.

Mit dieser Definition ist natürlich noch *nichts* über die Existenz eines Körpers der komplexen Zahlen gesagt! Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, ‚die‘ komplexen Zahlen einzuführen und damit den Existenznachweis zu führen. Darum geht es im Folgenden:

Arithmetische Einführung der komplexen Zahlen

Wir erinnern an die übliche Einführung in der Analysis (man vergleiche dazu z. B. [Wa I, S. 166]:

In $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ betrachten wir die beiden Operationen

$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$ (*„Addition“*) ,

$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$ (*„Multiplikation“*) .

Dann ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein *(kommutativer) Körper* mit *Nullelement* $(0, 0)$ und *Einselement* $(1, 0)$. Alle *Regeln*, die man in der Analysis für die reellen Zahlen allein mit Hilfe der Körperaxiome herleitet, gelten daher auch in $\mathbb{C}$. *Definitionen* und *Bezeichnungen* können so entsprechend übernommen werden.

Hier ist die Einbettung durch die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \ni a \longmapsto (a, 0) \in \mathbb{C}$ gegeben. Daher können wir die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $\varphi(a) = (a, 0)$ *‚identifizieren‘*, d. h. $\varphi(a)$ und a werden nicht mehr unterschieden. In diesem Sinne ist $\mathbb{R}$ *Teilkörper von* $\mathbb{C}$.

Mit $i := (0, 1)$ hat man dann $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Damit folgt für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib \, .$$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen läßt sich damit — im Gegensatz zu Cardanos Zeiten jetzt wohlbegründet — zurückführen auf das Rechnen mit reellen Zahlen und i unter Beachtung von

$$\boxed{i^2 = -1}\,.$$

Die komplexen Zahlen als Unterring der 2×2-Matrizen

In $\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ nehmen wir als $+$ und $\cdot$ die Addition und Multiplikation von Matrizen *(linear-algebraische Einführung)*. Aufgrund von

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

führen diese beiden Operationen nicht aus $\mathbb{C}$ heraus; $\mathbb{C}$ ist also zunächst ein Unter*ring* der reellen 2×2-Matrizen. Die Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$ bestätigt man durch ‚scharfes Hinsehen'. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

ist für $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$ — also $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ — $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar und

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}\,.$$

Da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gerade auch ‚Eins' in $\mathbb{C}$ ist, hat man: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper.*

Hier liefert

$$\varphi : \mathbb{R} \ni a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

die Einbettung; identifiziert man wieder a mit $\varphi(a)$, dann gelten mit

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{i^2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boxed{= -1}$$

und

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \boxed{= a + ib}\,.$$

Die komplexen Zahlen als Restklassenring

$\mathbb{R}$ ist nicht ‚algebraisch abgeschlossen'; zum Beispiel hat das Polynom x^2+1 keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, es ist ‚irreduzibel'. ‚Faktorisiert' man den ‚Polynomring' $\mathbb{R}[x]$ nach dem von x^2+1 erzeugten ‚Ideal' (x^2+1), dann erhält man mit

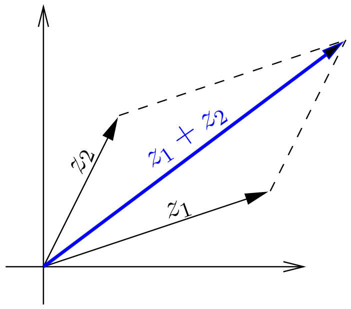
$$\boxed{\mathbb{C} := \mathbb{R}[x]/(x^2+1)}$$

einen komplexen Zahlkörper, wobei i als die zu x gehörige ‚Restklasse' gewählt werden kann *(algebraische Einführung)*.

Geometrische Einführung der komplexen Zahlen

$\mathbb{C}$ ist eine Ebene — auch *Gaußsche Zahlenebene* genannt —, in der 0 und 1 als zwei verschiedene Punkte festgelegt sind. Komplexe Zahlen sind Vektoren in der Ebene. Die *Addition* komplexer Zahlen wird definiert als gewöhnliche Vektoraddition.

Addition:



Wie die *Multiplikation* geometrisch eingeführt werden kann, wird im Kontext von Abschnitt 1.4 verständlich. Der Nachweis der Körperaxiome erfolgt dann durch elementargeometrische Überlegungen.

1.3 Elementare Operationen und Regeln

Man überlegt sich leicht:

Je zwei Körper der komplexen Zahlen sind (als Körper) isomorph.

Daher sprechen wir im Folgenden von *dem* Körper der komplexen Zahlen.

Es sei nun

$$\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot) \text{ ein Körper der komplexen Zahlen}$$

mit der imaginären Einheit i. Insbesondere gilt dann:

Bemerkung 1 *a)* $a + ib = c + id \iff a = c \,\wedge\, b = d \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$

b) *Für* $z \in \mathbb{C}: \quad z^2 = -1 \iff z \in \{i, -i\}$

Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir:

x *„Realteil"* von z $(\operatorname{Re} z,\, \mathfrak{Re}\, z)$

y *„Imaginärteil"* von z $(\operatorname{Im} z,\, \mathfrak{Im}\, z)$

z *„rein imaginär"* $:\iff \mathfrak{Re}\, z = 0$

$\overline{z} := x - iy \quad \big(= x + i(-y)\big)$ *„konjugiert komplexe Zahl"* (zu z)

$|z| := (x^2 + y^2)^{1/2}$ *„Betrag"* (*„Länge"*) von z

Der Betrag komplexer Zahlen liefert so für reelle Zahlen den dort definierten Betrag.

Offenbar gelten $\mathfrak{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathfrak{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Wir erinnern noch einmal an die — für $z,\, z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ — schon aus der Analysis-Vorlesung bekannten

Regeln *a)* $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \qquad \overline{\overline{z}} = z, \qquad |z| = |\overline{z}|$

b) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

c) $\mathfrak{Re}(z_1 \pm z_2) = \mathfrak{Re}(z_1) \pm \mathfrak{Re}(z_2)$

d) $\mathfrak{Im}(z_1 \pm z_2) = \mathfrak{Im}(z_1) \pm \mathfrak{Im}(z_2)$

e) *Für* $z \neq 0: \quad z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}, \qquad (\overline{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$

f) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \iff \mathfrak{Re}(z) = z$

g) $|\mathfrak{Re}(z)|,\, |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z| \leq |\mathfrak{Re}(z)| + |\mathfrak{Im}(z)|$

Die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ ist also ein *Automorphismus (Involution)*.

Auch die folgenden **Eigenschaften des Betrages** auf $\mathbb{C}$ sollten vertraut sein:

[B0] $|z| \geq 0$ *(„Positivität")*

[B1] $|z| = 0 \iff z = 0$ *(„Definitheit")*

[B2] $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(„Dreiecksungleichung")*

[B3] $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

[B4] $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ *für* $z_2 \neq 0$

[B5] $|z_1 - z_2| \;=\; |z_2 - z_1|$ *(„Symmetrie“)*

[B6] $\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \;\le\; |z_1 - z_2| \;\le\; |z_1| \,+\, |z_2|$

[B7] $|z_1 - z_2| \;\le\; |z_1 - z| \,+\, |z - z_2|$

Bemerkung 2

Nicht-reelle Nullstellen von Polynomen $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ *mit reellen Koeffizienten* a_ν $(\nu = 0, \ldots, n)$ *treten paarweise (konjugiert komplex) auf, d. h. mit* $P(\alpha) = 0$ *für* $\alpha \in \mathbb{C}$ *ist auch* $P(\overline{\alpha}) = 0$ *.*

Achtung: *Beim Übergang von* $\mathbb{R}$ *zu* $\mathbb{C}$ *geht die ‚Ordnungsstruktur‘ verloren:*

Die Anordnung von $\mathbb{R}$ läßt sich *nicht so* auf $\mathbb{C}$ fortsetzen, daß $\mathbb{C}$ ‚angeordneter Körper‘* ist (die Eigenschaften (A 10), (A 11) und (A 12) aus [Wa I, S. 7] gelten zusätzlich):

Wegen $i^2 = -1$ ist $i \neq 0$. Wäre $i > 0$, so folgte $-1 = i^2 > 0$; im Falle $i < 0$ hätte man $-i > 0$ und so $-1 = (-i)^2 > 0$: Widerspruch!

‚Stetigkeit‘ der Grundoperationen $(a,\, b,\, c,\, x,\, y,\, z \in \mathbb{C}:)$

(1) $|(x + y) - (a + b)| \;\le\; |x - a| + |y - b|$

(1’) $|(x - y) - (a - b)| \;\le\; |x - a| + |y - b|$

(2) $|(x \cdot y) - (a \cdot b)| \;\le\; |a| \cdot |y - b| \,+\, |b| \cdot |x - a| \,+\, |x - a|\,|y - b|$

(3) $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| \;\le\; \dfrac{2}{|a|^2} \cdot |x - a|,$ *falls* $a \neq 0$ *und* $|x - a| \le \dfrac{|a|}{2}$

(4) $\big|\,|x| \,-\, |a|\,\big| \;\le\; |x - a|$

Diese Regeln dürften aus der Analysis bekannt sein (man vergleiche etwa [Ho, S. 52 ff]). Sie zeigen die Stetigkeit von Summen-, Differenz-, Produkt-, Betrags- und Quotientenbildung quantitativ. Aus ihnen folgen unmittelbar z. B. ganz einfach die Grundregeln für die Konvergenz von Folgen, Reihen, Funktionen und die für (lokale und globale) Stetigkeit.

1.4 Argument, geometrische Veranschaulichung

In der Analysis definiert man meist die Exponentialfunktion gleich für komplexes Argument durch die (überall absolut konvergente) Reihe

$$\exp(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})\,.$$

* Man kann zwar die ‚Ordnung‘ von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ erweitern (z. B. lexikographisch); jedoch geht die Verträglichkeit mit der Multiplikation dabei verloren!

Auch die trigonometrischen Funktionen sin und cos können (über die Reihendarstellung) gleich für komplexe Argumente definiert werden. Man erhält so ganz einfach u. a. die

Euler-Formel $\quad \boxed{\exp(iz) \;=\; \cos(z) \,+\, i\,\sin(z)} \qquad (z \in \mathbb{C})\,.$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $z = \exp(i\varphi)$ mit einem $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $z^n = \exp(in\varphi)$; so hat man die

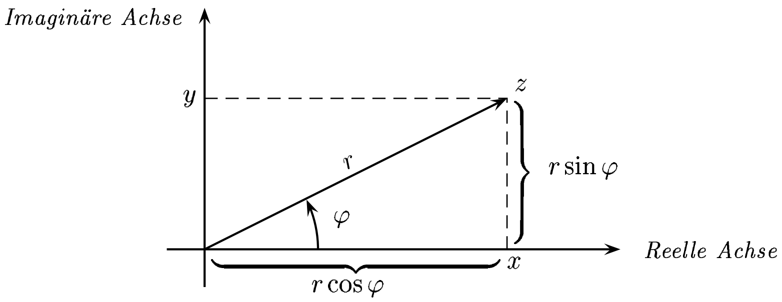
de Moivre-Formel* $\quad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,.$

Aus der Analysis kennt man schon die

Polardarstellung: *Ist* $z \,=\, x + i\,y \,\in\, \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *(mit* $x,\, y \in \mathbb{R}$*), dann existieren eindeutig* $-\pi \,<\, \varphi \,\le\, \pi$ *und* $0 < r < \infty$ *mit*

$$(*) \qquad z \,=\, r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \;=\; r\exp(i\,\varphi)$$

Dabei gelten:
$r \,=\, |z|\,,\; x \,=\, r\cos\varphi \,=\, \mathfrak{Re}\,z$ *und* $y \,=\, r\sin\varphi \,=\, \mathfrak{Im}\,z\,.$



Jedes $\varphi \in \mathbb{R}$, das $(*)$ erfüllt, nennen wir *ein „Argument von* z*“* und notieren

$$\arg z := \{\varphi \in \mathbb{R} : \;\varphi \text{ Argument von } z\}.$$

Das eindeutig bestimmte $\varphi \in \arg z \cap\,]-\pi, \pi]$ notieren wir als $\operatorname{Arg} z$ („*Hauptwert des Arguments von* z“). Offenbar gilt dann

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : \; k \in \mathbb{Z}\}\,;$$

$\arg z$ ist also eine ‚Restklasse‘ in $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$.
Häufig schreibt man (und das machen wir gelegentlich auch) lax

$$\varphi = \arg z \qquad \text{statt} \qquad \varphi \in \arg z\,.$$

* Abraham de Moivre (1667 - 1754)

Für $A, B \subset \mathbb{C}$ notieren wir

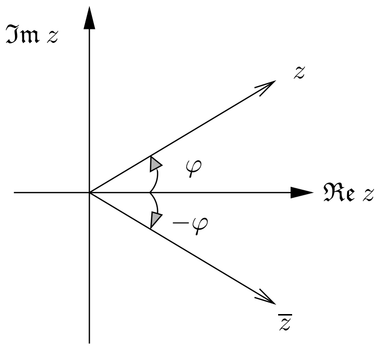
$$A + B \;:=\; \{a + b :\; a \in A \;\wedge\; b \in B\}$$

und entsprechend auch $-A$, $A - B$, $A \cdot B$.

Damit gelten für z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

a) $\arg(\frac{1}{z}) \;=\; \arg(\overline{z}) \;=\; -\arg z$

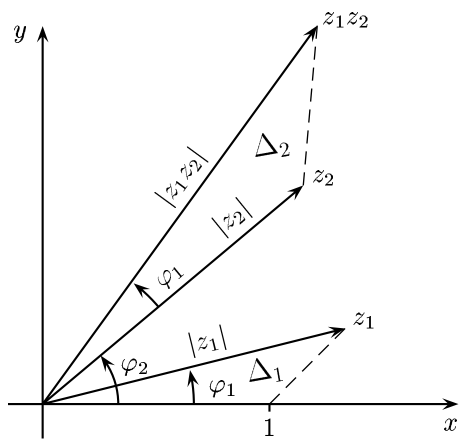
b) $\arg(z_1 \cdot z_2) \;=\; \arg(z_1) + \arg(z_2)$



Denn offensichtlich gilt $\arg(\overline{z}) \;=\; -\arg z$, und mit $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ ergibt sich die Gleichung $\arg(\frac{1}{z}) \;=\; \arg(\overline{z})$; damit ist a) gezeigt. Für b) überlegt man: Mit der Funktionalgleichung der exp-Funktion folgt, daß die r. S. Teilmenge der l. S. ist; mit a) erhält man dann die Gleichheit.

Anmerkung: Die b) entsprechende Aussage gilt *nicht* für die Hauptwerte!

Die geometrische Einführung der *Addition* — als Vektoraddition — hatten wir schon in Abschnitt 1.2 erwähnt. Die *Multiplikation* kann über ähnliche Dreiecke eingeführt werden. Man beachte dazu die Graphik:



Es seien $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 \exp(i\varphi_2)$. Wegen $\dfrac{|z_1 z_2|}{|z_2|} = \dfrac{|z_1|}{1}$ sind die beiden Dreiecke $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ ähnlich. Durch eine ‚Drehstreckung' ergibt sich $z_1 z_2$.

1.5 Wurzeln

Definition: Für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ eine *„n-te Wurzel aus a"*; speziell für $a = 1$ auch *„n-te Einheitswurzel"*, für $n = 2$ (und beliebigem a) auch *„Wurzel aus a"*.

Es seien $a, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $a = \varrho \exp(i\psi)$ und $z = r \exp(i\varphi)$.

Dann gilt:
$$z^n = a \iff r^n \exp(i(n\varphi)) = \varrho \exp(i\psi)$$
$$\iff r^n = \varrho \ \wedge \ n\varphi = \psi + 2k\pi \qquad (\text{für ein } k \in \mathbb{Z})$$
$$\iff z = \varrho^{1/n} \exp\left(i\,\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) =: z_k \quad (\text{für ein } k \in \mathbb{Z})$$

Unter diesen z_k sind die für $k = 0, \ldots, n-1$ paarweise verschieden. Da die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \exp(it) \in \mathbb{C}$ die Periode 2π hat, erhalten wir so schon alle Werte, also:

Bemerkung 3 *Durch* $\boxed{\varrho^{1/n} \exp\left(i\,\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \ldots, n-1)}$ *sind gerade alle n-ten Wurzeln aus a gegeben.*

Die n-ten Wurzeln liefern die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks.

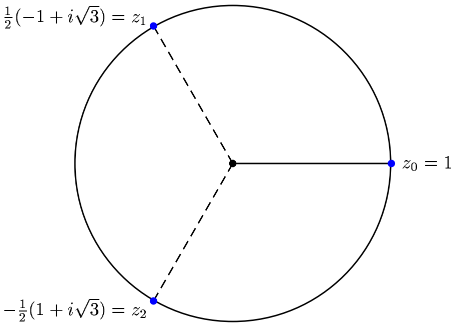
Speziell gilt somit:

Bemerkung 4 *Durch* $\boxed{\exp\left(i\,\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \ldots, n-1)}$ *sind alle n-ten Einheitswurzeln gegeben.*

Wir notieren
$$\sqrt[n]{a} := \{z \in \mathbb{C} : z^n = a\}, \qquad \sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$$
und schreiben gelegentlich lax
$$z = \sqrt[n]{a} \quad \text{statt} \quad z \in \sqrt[n]{a} \quad \text{bzw.} \quad z = \sqrt{a} \quad \text{statt} \quad z \in \sqrt{a}\,.$$

Die Gleichung $z^n = 1$ heißt *„Kreisteilungsgleichung"*. Dies wird durch Beispiele der folgenden Art plausibel:

Beispiel $n = 3$:



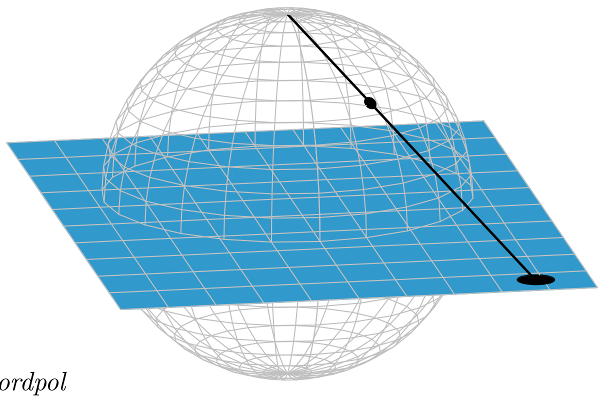
1.6 Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion

Dem berühmten Mathematiker Bernhard Riemann (1826 – 1866) verdanken wir — neben epochemachenden Leistungen — u. a. auch ein Modell der komplexen Zahlen, welches sehr leicht eine *Veranschaulichung des Punktes* ∞ erlaubt:

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ werden dabei mit den Punkten der ‚Äquatorebene' ($\xi_3 = 0$) des $\mathbb{R}^3$ identifiziert. Punkte $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ werden auf die Einheitskugel*

$$S := \left\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{\nu=1}^{3} \xi_\nu^2 = 1\right\}$$

im $\mathbb{R}^3$ abgebildet, indem man den Schnittpunkt Z von S mit der Geraden



durch den *Nordpol*

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnet.

* genauer: *Einheitssphäre* oder *Rand* der Einheitskugel

Einsetzen von

$$Z = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\mathbb{R} \ni \lambda > 0)$$

in die Gleichung $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ der Einheitssphäre ergibt

$$\lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \,.$$

Wir erhalten so durch

$$\xi_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+1} = \frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}+1}\,, \quad \xi_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+1} = \frac{i(\overline{z}-z)}{z\overline{z}+1}\,,$$

$$\xi_3 = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} = \frac{z\overline{z}-1}{z\overline{z}+1}$$

die *stereographische Projektion* τ von $\mathbb{C}$ auf $S \setminus \{N\}$ und durch

$$x = \frac{\xi_1}{1-\xi_3}, \quad y = \frac{\xi_2}{1-\xi_3}, \quad \text{also} \quad z = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1-\xi_3}\,,$$

deren Umkehrabbildung.

Nach Konstruktion wird bei der stereographischen Projektion das Innere des Einheitskreises von $\mathbb{C}$ auf die ‚Süd-Halbkugel' und entsprechend das Äußere auf die ‚Nord-Halbkugel' abgebildet. Die Punkte auf dem Rand des Einheitskreises werden auf sich selbst abgebildet (Fixpunkte von τ).

Ferner strebt der Bildpunkt $Z = \tau(z)$ gegen den Nordpol N für $|z| \longrightarrow \infty$. Erweitert man $\mathbb{C}$ durch den ‚unendlich fernen Punkt' ∞ zur erweiterten (abgeschlossenen) komplexen Zahlenebene *(Ein-Punkt-Kompaktifizierung)*

$$\boxed{\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}}\,,$$

so läßt sich die stereographische Projektion durch die Zuordnung $\infty \longmapsto N$ fortsetzen zu einer bijektiven Abbildung von $\overline{\mathbb{C}}$ auf die Riemannsche Zahlenkugel S. Diese fortgesetzte Abbildung notieren wir wieder mit dem gleichen Symbol τ.

Mit Hilfe der Riemannschen Zahlenkugel lassen sich Aussagen über das Verhalten komplexer Funktionen in der Umgebung von ∞ besser verstehen, da auf ihr der Punkt $\infty\,(= N)$ keine Ausnahmestellung hat.

‚Rechenregeln' in $\overline{\mathbb{C}}$

An vielen Stellen, so zum Beispiel für den Abschnitt 8.1 über Möbius-Transformationen, ist es zweckmäßig, die ‚Rechenregeln' in $\mathbb{C}$ wie folgt auf $\overline{\mathbb{C}}$ auszudehnen:

Für $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ seien:

$$\begin{array}{lcl} a + \infty & := & \infty + a \ := \ \infty \\ \infty + \infty & := & \infty \\ \infty \cdot b & := & b \cdot \infty \ := \ \infty \\ a/\infty & := & 0 \\ b/0 & := & \infty \end{array}$$

Diese Festlegungen führen zu keinem Widerspruch zu den Gesetzen in $\mathbb{C}$. Hingegen sind Terme wie $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ und ∞/∞ allgemein nicht sinnvoll zu definieren. Sie können — wie im Reellen — in Spezialfällen durch Stetigkeits- bzw. Konvergenzbetrachtungen ausgewertet werden.