Alternativer Beweis zu Norm-Hüllen und Norm-limes-Satz:

Norm-Hüllen-Satz:

$$(\#) \quad \|f\| = \inf\{ i(g) : \mathcal{F} \ni g \geq |f| \}$$

Nach (#) ex. zu $n \in \mathbb{N}$ ein $g_n \in \mathcal{F}$ mit $g_n \geq |f|$ und $i(g_n) \leq \|f\| + \frac{1}{n}$. OE $g_n \downarrow$ (sonst $\bigwedge_{\nu=1}^{n} g_\nu$ betrachten ...)

$g(x) := \lim g_n(x)$ $(\in \mathbb{R})$; nach LEVI $\downarrow$:

$g \in \mathcal{F} \wedge i(g_n) \to i(g)$: $i(g) \leq \|f\|$

$(g \geq |f|$: $i(g) = \|g\| \geq \|f\|)$ □

(Auch aus Satz von FATOU ablesbar.)

Norm-limes-Satz $|f_n(x)| \uparrow |f(x)|$ $(x \in \mathbb{R})$ $\overset{!}{\leadsto}$ $\|f_n\| \uparrow \|f\|$

$s := \sup_n \|f_n\|$ $(\in [0, \infty])$ $\leadsto$ $s \leq \|f\|$, also OE $s < \infty$!

Ex. $g_n \in \mathcal{F}$ m. $g_n \geq |f_n|$ u. $i(g_n) = \|f_n\|$ $(n \in \mathbb{N})$

$$g(x) := \begin{cases} \liminf g_n(x), & \text{falls endl.} \\ |f(x)|, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Satz von FATOU: $g \in \mathcal{F}$ u. $i(g) \leq \liminf i(g_n) \leq s$

$\liminf g_n(x) \geq \liminf |f_n(x)| = \lim |f_n(x)| = |f(x)|$;

$g(x) \geq |f(x)|$: $s \geq i(g) = \|g\| \geq \|f\| \geq s$ □

(zu Vorl. S. 38 f)