Zu § 104: Falls $\mu : \underline{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{X}$ Inhalt:

1. $\underline{|\mu| = |\mu_0|}$, wenn μ_0 Fortsetzung von μ zu Inhalt auf $R(\mathfrak{S})$

„$\leq$": klar, da $\mathfrak{S} \subset R(\mathfrak{S})$

„$\geq$": zu $A \subset \mathfrak{X}$ und $A_1, \dots, A_n \in R(\mathfrak{S})$ mit $\dot{\bigcup}_{\nu=1}^{n} A_\nu \subset A$

ex. $B_\varkappa^{(\nu)} \in \mathfrak{S}$ ./. $A_\nu = \dot{\bigcup}_{\text{endl.}} B_\varkappa^{(\nu)}$

$|\mu|(A) \geq \sum_{\varkappa,\nu} |\mu(B_\varkappa^{(\nu)})| = \sum_\nu \left(\sum_\varkappa |\mu(B_\varkappa^{(\nu)})|\right) \geq \sum_\nu |\mu_0(A_\nu)|$,

also $|\mu|(A) \geq |\mu_0|(A)$. □

2. $\underline{A = \dot{\bigcup}_{\varkappa=1}^{k} A_\varkappa \overset{!}{\curvearrowright} |\mu|(A) = \sum_{\varkappa=1}^{k} |\mu|(A_\varkappa)}$ $(A, A_\varkappa \in R(\mathfrak{S}); k \in \mathbb{N})$

Nach 1. $\underline{\text{OE } \mathfrak{S} \text{ Ring}}$

„$\geq$": für $\varkappa \in \{1, \dots, k\}$: $n(\varkappa) \in \mathbb{N}$ u. $A_\nu^{(\varkappa)} \in \mathfrak{S}$ ./. $\dot{\bigcup}_{\nu=1}^{n(\varkappa)} A_\nu^{(\varkappa)} \subset A_\varkappa$:

$\dot{\bigcup}_\varkappa \dot{\bigcup}_\nu A_\nu^{(\varkappa)} \subset \dot{\bigcup}_{\varkappa=1}^{k} A_\varkappa = A$: $\sum_\varkappa \underbrace{\sum_\nu |\mu(A_\nu^{(\varkappa)})|}_{\leadsto \sup} \leq |\mu|(A)$:

$$\sum_\varkappa |\mu|(A_\varkappa) \leq |\mu|(A)$$

„$\leq$": $B_\nu \in \mathfrak{S}$ ./. $\dot{\bigcup}_{\nu=1}^{n} B_\nu \subset A$: $B_\nu = B_\nu \cap A = \dot{\bigcup}_{\varkappa=1}^{k} (B_\nu \cap A_\varkappa)$

$\mu(B_\nu) = \sum_\varkappa \mu(B_\nu \cap A_\varkappa)$: $|\mu(B_\nu)| \leq \sum_\varkappa |\mu(B_\nu \cap A_\varkappa)|$

$\sum_\nu |\mu(B_\nu)| \leq \sum_\nu \sum_\varkappa |\mu(B_\nu \cap A_\varkappa)| = \sum_\varkappa \sum_\nu \dots$

$\leq \sum_\varkappa |\mu|(A_\varkappa)$

$\dot{\bigcup}_\nu (B_\nu \cap A_\varkappa) \subset A_\varkappa$

Das zeigt: $|\mu|(A) \leq \sum_\varkappa |\mu|(A_\varkappa)$ □