

Zu § 104: Fall  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$  Inhalt:

1.  $|\mu| = |\mu_0|$ , wenn  $\mu_0$  Fortsetzung von  $\mu$  zu Inhalt auf  $\mathcal{R}(\mathcal{F})$

" $\leq$ ": klar, da  $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$

" $\geq$ ": für  $A \in \mathcal{R}$  und  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$  mit  $\bigcup_{v=1}^n A_v \subset A$   
 ex.  $B_{xv}^{(v)} \in \mathcal{F}$   $\cdot$   $A_v = \bigcup_{\text{uncl.}} B_{xv}^{(v)}$

$$|\mu|(A) \geq \sum_{x,v} |\mu|(B_{xv}^{(v)}) = \sum_v \left( \sum_x |\mu|(B_{xv}^{(v)}) \right) \geq \sum_v |\mu_0|(A_v)|,$$

also  $|\mu|(A) \geq |\mu_0|(A)$ .  $\square$

2.  $A = \bigcup_{x=1}^{\ell} A_x \quad \hat{=} \quad |\mu|(A) = \sum_{x=1}^{\ell} |\mu|(A_x) \quad (A, A_x \in \mathcal{R}(\mathcal{F}), \ell \in \mathbb{N})$

Nach 1.  $\mathcal{F}$  Ring

" $\geq$ ": für  $x \in \{1, \dots, \ell\}$ :  $n(x) \in \mathbb{N}$  u.  $A_v^{(x)} \in \mathcal{F}$   $\cdot$   $\bigcup_{v=1}^{n(x)} A_v^{(x)} \subset A_x$ :  
 $\bigcup_x \bigcup_v A_v^{(x)} \subset \bigcup_{x=1}^{\ell} A_x = A$ :  $\sum_x \underbrace{\sum_v |\mu|(A_v^{(x)})}_{\rightarrow \text{Step}} \leq |\mu|(A)$

$$\sum_x |\mu|(A_x) \leq |\mu|(A)$$

" $\leq$ ":  $B_v \in \mathcal{F}$   $\cdot$   $\bigcup_{v=1}^m B_v \subset A$ :  $B_v = B_v \cap A = \bigcup_{x=1}^{\ell} (B_v \cap A_x)$

$$|\mu|(B_v) = \sum_x |\mu|(B_v \cap A_x) : |\mu|(B_v) \leq \sum_x |\mu|(B_v \cap A_x)|$$

$$\sum_v |\mu|(B_v) \leq \sum_v \sum_x |\mu|(B_v \cap A_x) = \sum_x \sum_v \dots$$

$$\leq \sum_x |\mu|(A_x)$$

$$\bigcup_v (B_v \cap A_x) \subset A_x$$

Dies zeigt:  $|\mu|(A) \leq \sum_x |\mu|(A_x)$   $\square$