Zu Seite 116 (Übungsaufgabe 2.4.4 des Buches)

> Es seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{S}$ ein Prä-Ring über X und $\rho: \mathcal{S} \to [0,\infty[$ ein Inhalt. ρ sei „regulär",
> d.h.: $\forall A \in \mathcal{S}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists K$ (kompakt, $\subset X$) $\exists O$ (offen, $\subset X$)
> $\exists B \in R(\mathcal{S})$: $K \subset A \subset O$, $O \setminus K \subset B \wedge \rho(B) < \varepsilon$.
> Dann ist ρ ein Maß.

Beweis: Für $(S_\nu) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0}$: $S_0 = \dot{\bigcup}_{\nu=1}^{\infty} S_\nu \overset{!}{\Rightarrow} \rho(S_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho(S_\nu)$

„$\geq$": (schon bekannt:) Für $m \in \mathbb{N}$: $V_m := \dot{\bigcup}_{\nu=1}^{m} S_\nu \subset S_0$:

$\sum_{\nu=1}^{m} \rho(S_\nu) = \rho(V_m) \leq \rho(S_0)$ (da $S_0 = V_m \,\dot\cup\, (S_0 \setminus V_m)$ (in $R(\mathcal{S})$))

„$\leq$": Σ r.S. $< \infty$; zu $\varepsilon > 0$ u. $m \in \mathbb{N}_0$ ex. K_m kompakt, O_m offen und $B_m \in R(\mathcal{S})$ mit $K_m \subset S_m \subset O_m$, $O_m \setminus K_m \subset B_m$ und $\rho(B_m) \leq \varepsilon \cdot 2^{-m}$; $K_0 \subset S_0 \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} O_\nu$: Ex. $n \in \mathbb{N}$ ⁄.
$K_0 \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} O_\nu$: $S_0 \subset K_0 \cup B_0$ u. $O_\nu \subset S_\nu \cup B_\nu$ liefern:
$S_0 \subset B_0 \cup \bigcup_{\nu=1}^{n} (S_\nu \cup B_\nu)$;

$$\rho(S_0) \leq \rho(B_0) + \sum_{\nu=1}^{n} (\rho(S_\nu) + \rho(B_\nu)) \leq 2\varepsilon + \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho(S_\nu)$$

$(\rho(A) = i_\rho(\chi_A) = \|\chi_A\| = \rho^*(A) \quad (A \in R(\mathcal{S})))$

Zu Seite 117:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{S.116} \arrow[d, Rightarrow] & & \\
h \text{ linksstetig} \arrow[d, "\text{triv}"'] & \Leftrightarrow & {|\mu| \text{ Maß}} \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
 & & & \arrow[l, "\text{S.114f}"'] \\
g \text{ linksstetig} \arrow[u, bend right, "\text{s.S.117}"'] & & \mu \text{ Maß} \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
 & & & \arrow[l, "\text{S.115}"'] \\
 & & \mu \text{ schwaches Maß} &
\end{tikzcd}$$